Chapitre IX

Équations de Maxwell. Ondes électromagnétiques

A. Équations de Maxwell

1. Courant de déplacement

Le champ électromagnétique a été déterminé dans les chapitres précédents à partir des quatre équations locales

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \tag{IX.1}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{IX.2}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \tag{IX.3}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} \tag{IX.4}$$

et des conditions sur $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à l'infini.

D'après l'équation (IX.4),

$$\operatorname{div} \vec{\jmath} = 0 \tag{IX.5}$$

puisque la divergence d'un rotationnel est toujours nulle. Or cette équation, correcte dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires, ne l'est plus dans le cas général. En raison de la conservation locale de la charge (cf. § V.B), on doit en effet avoir

$$\operatorname{div} \vec{\jmath} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0, \tag{IX.6}$$

ce qui impose de modifier l'équation (IX.4). Or $\varrho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$, donc

$$\operatorname{div}\left(\vec{\jmath} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0. \tag{IX.7}$$

La solution la plus simple, confirmée par l'expérience, est donc de rajouter à $\vec{\jmath}$ dans l'équation (IX.4) le terme, appelé ***courant de déplacement***,

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Le courant *de déplacement* est notamment non nul entre les armatures d'un condensateur appartenant à un circuit parcouru par un courant. Il permet que le courant *de charges* ($\vec{\jmath}$) arrivant à une armature par le reste du circuit soit identique à celui partant de l'autre armature, bien que $\vec{\jmath}$ soit nul entre les armatures.

On obtient ainsi la version définitive des ***équations de Maxwell*** :

$$\boldsymbol{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}}, \qquad \text{(\textbf{\textit{équation de Maxwell-Gauss}})} \tag{IX.8}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}, \qquad \text{(\textbf{\textit{équation de Maxwell-Faraday}})} \tag{IX.9}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{div} \vec{B} = 0}, \qquad ※1 \tag{IX.10}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}. \qquad \text{(\textbf{\textit{équation de Maxwell-Ampère}})} \tag{IX.11}$$

Avec la force de Lorentz et les conditions aux limites sur $\vec{E}$ et $\vec{B}$, les équations de Maxwell déterminent complètement le mouvement de particules chargées. Elles sont linéaires, donc $\vec{E}$ et $\vec{B}$ obéissent au principe de superposition. La détermination directe de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à partir des équations de Maxwell est néanmoins délicate en régime non stationnaire car les champs électrique et magnétique sont alors couplés. Il est en fait plus simple de passer par les potentiels.

2. Potentiels

Remarquons d'abord que la constante

$$\boldsymbol{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} \approx 3\times 10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}} \tag{IX.12}$$

a la dimension d'une vitesse. Nous verrons qu'il s'agit de la ***vitesse de la lumière dans le vide***.

D'après les équations (IX.9) et (IX.10),

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \tag{IX.13}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}, \tag{IX.14}$$

où V et $\vec{A}$ sont respectivement les potentiels scalaire et vectoriel. Introduisons-les dans les équations (IX.8) et (IX.11). On obtient

$$-\Delta V - \frac{\partial(\mathrm{div}\,\vec{A})}{\partial t} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \tag{IX.15}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_0\,\vec{\jmath} - \varepsilon_0\,\mu_0\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}. \tag{IX.16}$$

On peut réécrire ces équations de la manière suivante :

$$\Box V = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial V}{\partial t}\right), \tag{IX.17}$$

$$\Box\vec{A} = -\mu_0\,\vec{\jmath} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial V}{\partial t}\right), \tag{IX.18}$$

où $\Box$ est l'opérateur ***d'Alembertien*** défini par

$$\boldsymbol{\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}}. \tag{IX.19}$$

Le même terme

$$\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial V}{\partial t}$$

apparaît dans les deux équations. Or les expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en fonction de V et $\vec{A}$ ne déterminent pas les potentiels de manière unique. En effet, pour toute fonction f, si

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f, \tag{IX.20}$$

alors

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}', \tag{IX.21}$$

puisque le rotationnel d'un gradient est nul. De même, comme

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V - \left(\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} - \frac{\partial\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f}{\partial t}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(V - \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}, \tag{IX.22}$$

on a

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} \tag{IX.23}$$

avec

$$V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{IX.24}$$

1. Parfois appelée « équation de Maxwell-flux » car elle est reliée au flux du champ magnétique, ou encore « équation de Maxwell-Thomson ».

Il est toujours possible de trouver une fonction f et de redéfinir V et $\vec{A}$ de telle sorte que

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \tag{IX.25}$$

Cette condition est appelée ***jauge de Lorenz*** (sans « t » : ce n'est pas le même physicien que celui de la force de *Lorentz*). Elle généralise la jauge de Coulomb ($\operatorname{div} \vec{A} = 0$) dans le cas de sources et de champs non stationnaires.

En jauge de Lorenz, les équations (IX.17) et (IX.18) deviennent

$$\Box V = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \tag{IX.26}$$

$$\Box \vec{A} = -\mu_0\, \vec{j}. \tag{IX.27}$$

Les solutions de ces équations, avec les conditions supplémentaires $V(\infty) = 0$ et $\vec{A}(\infty) = \vec{0}$, valables pour une distribution de sources localisée ou dont la densité décroît suffisamment rapidement avec la distance, sont les suivantes :

$$V(M, t) = \iiint_P \frac{\varrho(P, t - PM/c)}{4\,\pi\,\varepsilon_0\, PM}\, \mathrm{d}\tau, \tag{IX.28}$$

$$\vec{A}(M, t) = \iiint_P \frac{\mu_0\, \vec{j}(P, t - PM/c)}{4\,\pi\, PM}\, \mathrm{d}\tau. \tag{IX.29}$$

Ces solutions sont appelées ***potentiels retardés*** car les valeurs des potentiels en un point M à un instant t dépendent de celles des sources en tous les points P à l'instant antérieur $t - PM/c$. La quantité PM/c correspond au temps de propagation de P à M à la vitesse c des effets d'une variation des sources.

Une autre solution mathématique est celle des ***potentiels avancés***, où « $t - PM/c$ » est remplacé par « $t + PM/c$ ». Cette solution n'est pas physique car les potentiels (et les champs) dépendraient des valeurs des sources à un instant ultérieur : elle violerait donc le principe de causalité selon lequel la cause précède l'effet.

Lorsque les sources sont stationnaires, les potentiels retardés se réduisent aux expressions obtenues en électrostatique et en magnétostatique :

$$V(M) = \iiint_P \frac{\varrho(P)}{4\,\pi\,\varepsilon_0\, PM}\, \mathrm{d}\tau, \tag{IX.30}$$

$$\vec{A}(M) = \iiint_P \frac{\mu_0\, \vec{j}(P)}{4\,\pi\, PM}\, \mathrm{d}\tau. \tag{IX.31}$$

Les champs sont alors donnés par les lois de Coulomb et de Biot et Savart :

$$\vec{E}(M) = \iiint_P \frac{\varrho(P)\, \overrightarrow{PM}}{4\,\pi\,\varepsilon_0\, PM^3}\, \mathrm{d}\tau, \tag{IX.32}$$

$$\vec{B}(M) = \iiint_P \frac{\mu_0\, \vec{j}(P) \times \overrightarrow{PM}}{4\,\pi\, PM^3}\, \mathrm{d}\tau. \tag{IX.33}$$

Il ne faut pas en conclure que, pour des sources non stationnaires, les expressions de $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ peuvent être obtenues à partir des lois de Coulomb et de Biot et Savart en remplaçant $\varrho(P)$ et $\vec{j}(P)$ par $\varrho(P, t - PM/c)$ et $\vec{j}(P, t - PM/c)$. Les expressions correctes, établies par Jefimenko, sont

$$\vec{E}(M, t) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \iiint_P \left(\frac{\varrho(P, t - PM/c)\, \overrightarrow{PM}}{PM^3} + \frac{(\partial\varrho/\partial t)(P, t - PM/c)\, \overrightarrow{PM}}{c\, PM^2} - \frac{(\partial\vec{j}/\partial t)(P, t - PM/c)}{c^2\, PM} \right) \mathrm{d}\tau, \tag{IX.34}$$

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \iiint_P \left(\frac{\vec{j}(P, t - PM/c)}{PM^3} + \frac{(\partial\vec{j}/\partial t)(P, t - PM/c)}{c\, PM^2} \right) \times \overrightarrow{PM}\, \mathrm{d}\tau. \tag{IX.35}$$

Aux termes usuels en électrostatique et en magnétostatique, qui dépendent des valeurs de ϱ et de $\vec{j}$ (mais au temps retardé) et qui décroissent en $1/r^2$, s'ajoutent, dans le cas non stationnaire, des termes dépendant des dérivées de ϱ et de $\vec{j}$ par rapport au temps et qui décroissent en $1/r$. Ces derniers dominent donc à grande distance des sources si celles-ci ne sont pas stationnaires et ce sont eux qui sont à l'origine des ondes électromagnétiques.

En régime quasi stationnaire, le temps de propagation PM/c est négligeable devant le temps d'évolution du système (ce qui revient à négliger le courant de déplacement). Près des sources, les potentiels $V(M, t)$ et

$\vec{A}(M,t)$ sont alors donnés par (IX.30) et (IX.31) avec $\varrho(P,t)$ et $\vec{j}(P,t)$ au lieu de $\varrho(P)$ et $\vec{j}(P)$.

$$V(M,t) \approx \iiint_P \frac{\varrho(P,t)}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM}\,\mathrm{d}\tau, \tag{IX.36}$$

$$\vec{A}(M,t) \approx \iiint_P \frac{\mu_0\,\vec{j}(P,t)}{4\,\pi\,PM}\,\mathrm{d}\tau. \tag{IX.37}$$

De même pour $\vec{B}(M,t)$ à partir de (IX.33). En revanche, à cause du terme « $\partial\vec{A}/\partial t$ » dans (IX.13), il ne suffit pas de remplacer $\varrho(P)$ par $\varrho(P,t)$ dans (IX.32) pour obtenir $\vec{E}(M,t)$.

3. Théorème de Poynting

Une particule de charge q se déplaçant à une vitesse $\vec{v}$ par rapport à un référentiel galiléen reçoit du champ électromagnétique une puissance

$$\mathcal{P}_q = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = q\,\vec{E} \cdot \vec{v}. \tag{IX.38}$$

Un volume $\mathrm{d}\tau$ contenant différents types de porteurs de charge reçoit une puissance

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \sum_k \nu_k\,\mathrm{d}\tau\,q_k\,\vec{E} \cdot \vec{v}_k = \vec{j} \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}\tau. \tag{IX.39}$$

La puissance électromagnétique reçue par les charges dans un volume $\mathcal{V}$ fixe est donc

$$\boldsymbol{\mathcal{P}_\mathcal{V} = \iiint_\mathcal{V} \vec{j} \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}\tau}. \tag{IX.40}$$

Réécrivons ce terme en utilisant (IX.11) :

$$\mathcal{P}_\mathcal{V} = \iiint_\mathcal{V} \left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}\tau. \tag{IX.41}$$

Or

$$\mathrm{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{b}, \tag{IX.42}$$

donc

$$\mathcal{P}_\mathcal{V} = -\iiint_\mathcal{V} \left(\mathrm{div}\left[\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}\right] + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \varepsilon_0\,\vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\tau \tag{IX.43}$$

$$= -\oiint_\mathcal{S} \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} - \iiint_\mathcal{V} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\,\mu_0}\right)\mathrm{d}\tau, \tag{IX.44}$$

où l'on a appliqué le théorème d'Ostrogradski à la surface $\mathcal{S}$ de $\mathcal{V}$. Le volume étant fixe, on peut réécrire cette expression sous la forme

$$\boldsymbol{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_\mathcal{V} \left(\frac{\varepsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\,\mu_0}\right)\mathrm{d}\tau = \mathcal{P}_\mathcal{V} + \oiint_\mathcal{S} \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S}} \tag{IX.45}$$

(***théorème de Poynting***). La quantité

$$\boldsymbol{u_{EB} = \frac{\varepsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\,\mu_0}} \tag{IX.46}$$

peut s'interpréter comme la ***densité d'énergie électromagnétique associée au champ*** ; son intégrale est l'***énergie électromagnétique*** $\mathcal{E}$ contenue dans $\mathcal{V}$. La quantité

$$\boldsymbol{\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}} \tag{IX.47}$$

est le ***vecteur de Poynting*** [※2] et son intégrale sur $\mathcal{S}$ est le ***flux d'énergie électromagnétique*** à travers $\mathcal{S}$ (positif s'il y a un flux net vers l'extérieur).

Le théorème de Poynting traduit la conservation de l'énergie : la variation de l'énergie électromagnétique dans un volume est due au travail des forces électromagnétiques sur les charges dans ce volume ou (inclusivement) à un échange d'énergie avec l'extérieur par la surface de ce volume.

2. La preuve du théorème de Poynting utilise le théorème d'Ostrogradski, valable pour une surface fermée, et ne fait intervenir que la divergence du vecteur de Poynting. La divergence d'un rotationnel étant nulle, $\vec{\Pi} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}$ satisferait aussi le théorème pour n'importe quelle fonction $\vec{f}$.

   Le flux d'énergie électromagnétique à travers une surface ouverte dépend en revanche de la fonction $\vec{f}$. Nous admettrons que la densité de flux d'énergie électromagnétique est bien donnée par l'expression (IX.47).

On peut de même associer une ***densité (volumique) de quantité de mouvement***

$$\vec{g} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2} \tag{IX.48}$$

au champ électromagnétique.

B. Ondes électromagnétiques dans le vide

1. Équation des ondes électromagnétiques dans le vide

On s'intéresse ici aux équations de Maxwell dans le vide, c.-à-d. dans une région où $\varrho = 0$ et $\vec{j} = 0$. Prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday. On a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{a}) - \Delta\vec{a}, \tag{IX.49}$$

donc, dans le vide,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = -\Delta\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B})}{\partial t} = -\frac{\partial(\varepsilon_0\,\mu_0\,\partial\vec{E}/\partial t)}{\partial t}, \tag{IX.50}$$

d'où

$$\Box\vec{E} = \vec{0}. \tag{IX.51}$$

De même,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = -\Delta\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E})}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial(-\partial\vec{B}/\partial t)}{\partial t}, \tag{IX.52}$$

d'où

$$\Box\vec{B} = \vec{0}. \tag{IX.53}$$

Remarquer que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont découplés dans les équations (IX.51) et (IX.53).

En jauge de Lorenz, les équations (IX.26) et (IX.27) donnent également

$$\Box V = 0, \tag{IX.54}$$

$$\Box\vec{A} = \vec{0} \tag{IX.55}$$

dans le vide.

On obtient dans tous les cas l'***équation de d'Alembert*** décrivant la propagation tridimensionnelle à la vitesse c d'une onde $\psi(\vec{r}, t)$ non atténuée :

$$\boldsymbol{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0} \quad \textbf{dans le vide}, \tag{IX.56}$$

où $\boldsymbol{\psi \in \{\vec{E}, \vec{B}, V, \vec{A}\}}$. Cette équation est également valable pour les composantes **cartésiennes** de $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{A}$[※3].

La vitesse $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$ des ondes électromagnétiques étant égale à la vitesse mesurée pour la lumière visible, on peut légitimement supposer que la lumière *est* une onde électromagnétique. Cette hypothèse a été confirmée par de nombreuses expériences d'interaction de la lumière avec des particules chargées.

2. Ondes planes

L'équation de d'Alembert admet notamment comme solution des ondes planes. Considérons par exemple des ondes $\psi(x, t)$ ne dépendant spatialement que de la coordonnée x (les plans d'onde sont donc perpendiculaires à $\vec{u}_x$). Posons

$$u = x - c\,t, \tag{IX.57}$$

$$v = x + c\,t \tag{IX.58}$$

et exprimons les dérivées de ψ par rapport à x et t en fonction de celles par rapport à u et v[※4]. On a $\partial u/\partial x = \partial v/\partial x = 1$, donc

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\psi = \frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}, \tag{IX.59}$$

3. Attention, ce n'est pas vrai pour les composantes cylindriques car $\Delta\vec{f} \neq \Delta f_\rho\,\vec{u}_\rho + \Delta f_\phi\,\vec{u}_\phi + \Delta f_z\,\vec{u}_z$. Idem pour les composantes sphériques.

4. Plus rigoureusement, il faudrait distinguer les fonctions $(x, t) \mapsto \psi(x, t)$ et $(u, v) \mapsto \psi(x[u, v], t[u, v])$.

d'où

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + 2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\,. \tag{IX.60}$$

De même, $\partial u/\partial t = -c$ et $\partial v/\partial t = c$, donc

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial t} = -c\,\frac{\partial\psi}{\partial u} + c\,\frac{\partial\psi}{\partial v}\,, \tag{IX.61}$$

d'où

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-c\,\frac{\partial\psi}{\partial u} + c\,\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = c^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - 2\,c^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} + c^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\,. \tag{IX.62}$$

On obtient donc

$$\Box\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} = 0. \tag{IX.63}$$

En intégrant $\partial^2\psi/(\partial u\,\partial v)$ par rapport à u, on obtient que $\partial\psi/\partial v$ ne dépend pas de u, soit

$$\frac{\partial\psi}{\partial v} = g(v). \tag{IX.64}$$

En intégrant $\partial\psi/\partial v$ par rapport à v, on obtient que

$$\psi(x,t) = F(u) + G(v) = F(x - c\,t) + G(x + c\,t), \tag{IX.65}$$

où $G(v) = \int^v g(v')\,\mathrm{d}v'$.

Les solutions $F(x - c\,t)$ et $G(x + c\,t)$ correspondent à des ***ondes planes progressives*** : $F(x - c\,t)$, à une onde progressant à la vitesse c vers les x croissants ; $G(x + c\,t)$, à une onde progressant à la même vitesse (en valeur absolue) vers les x décroissants.

Plus généralement, pour une onde plane se propageant dans la direction indiquée par le vecteur unitaire $\vec{n}$,

$$\boldsymbol{\psi(\vec{r}, t) = F(\vec{n}\cdot\vec{r} - c\,t) + G(\vec{n}\cdot\vec{r} + c\,t)}, \tag{IX.66}$$

où F correspond à une onde progressive se propageant selon $+\vec{n}$ et G à une onde progressive se propageant selon $-\vec{n}$.

a. Ondes planes progressives (OPP)

Intéressons-nous au cas où ψ est le champ électrique ou le champ magnétique. On a toujours $\operatorname{div}\vec{B} = 0$. Par ailleurs, $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ puisqu'on est dans le vide. Pour une onde plane progressive vers les x croissants, c.-à-d. $\vec{E} = \vec{E}(x,t) = \vec{E}(u)$,

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \tag{IX.67}$$

E_x ne dépend donc pas de x, ni non plus de t puisque E_x est fonction de $u = x - c\,t$ seulement. Dans ce qui suit, nous retranchons à $\vec{E}$ et $\vec{B}$ l'éventuel terme constant par rapport à t et ne conservons que le terme non stationnaire. On a donc $E_x = 0$. On obtient le même résultat pour une onde progressant vers les x décroissants, ainsi que pour le champ $\vec{B}$ dans les deux sens.

Pour une onde plane progressive vers les x croissants,

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial E_z}{\partial x}\,\vec{u}_y + \frac{\partial E_y}{\partial x}\,\vec{u}_z = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}\,\vec{u}_y - \frac{\partial B_z}{\partial t}\,\vec{u}_z \tag{IX.68}$$

d'après l'équation de Maxwell-Faraday. Or $\partial/\partial x = \partial/\partial u$ et $\partial/\partial t = -c\,\partial/\partial u$, donc

$$\frac{\partial E_z}{\partial u} = -c\,\frac{\partial B_y}{\partial u} \tag{IX.69}$$

et

$$\frac{\partial E_y}{\partial u} = c\,\frac{\partial B_z}{\partial u}\,. \tag{IX.70}$$

En intégrant, puisqu'un éventuel constant a déjà été retranché à $\vec{E}$ et $\vec{B}$, on obtient

$$E_z = -c\,B_y \tag{IX.71}$$

et

$$E_y = c\,B_z, \tag{IX.72}$$

soit

$$\vec{E} = -c\,\vec{u}_x \times \vec{B} \tag{IX.73}$$

et

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\,\vec{u}_x \times \vec{E}. \tag{IX.74}$$

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ d'une onde plane progressive n'ont donc pas de composante (variable) dans la direction de propagation $\vec{n}$: les ondes électromagnétiques sont ***transverses***, c.-à-d. que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont normaux à $\vec{n}$.

Pour une onde plane progressive selon $+\vec{n}$, ils obéissent aux relations

$$\boldsymbol{\vec{E} = -c\,\vec{n} \times \vec{B}} \tag{IX.75}$$

et

$$\boldsymbol{\vec{B} = \frac{1}{c}\,\vec{n} \times \vec{E}}. \tag{IX.76}$$

Les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment donc un trièdre direct et

$$\boldsymbol{\|\vec{E}\| = c\,\|\vec{B}\|}. \tag{IX.77}$$

■

L'***intensité lumineuse*** d'une onde est définie comme la moyenne temporelle de la norme de la densité de flux d'énergie électromagnétique —c.-à-d. de la norme du vecteur de Poynting— :

$$\boldsymbol{I_{\mathrm{lum}} = \langle\|\vec{\Pi}\|\rangle}. \tag{IX.78}$$

Pour une onde plane progressive selon $+\vec{n}$,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0\,c}\,\vec{n}, \tag{IX.79}$$

donc

$$\boldsymbol{I_{\mathrm{lum}}} = \frac{\langle E^2\rangle}{\mu_0\,c} \boldsymbol{= \varepsilon_0\,c\,\langle E^2\rangle}. \tag{IX.80}$$

La densité d'énergie du champ associé à l'onde est

$$u_{EB} = \frac{\varepsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\,\mu_0} = \varepsilon_0\,E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}\,. \tag{IX.81}$$

On vérifie que, pendant une durée $\mathrm{d}t$, l'énergie de l'onde traversant une surface $\mathrm{đ}\vec{S}$, qui vaut

$$\vec{\Pi} \cdot \mathrm{đ}\vec{S}\,\mathrm{d}t,$$

est égale à l'énergie présente dans le volume

$$\mathrm{đ}\tau = \mathrm{đ}\vec{S} \cdot c\,\mathrm{d}t\,\vec{n}, \tag{IX.82}$$

c.-à-d.

$$u_{EB}\,\mathrm{đ}\tau.$$

Cela signifie que cette énergie se propage bien à la vitesse $c\,\vec{n}$ de l'onde et a traversé la surface $\mathrm{đ}\vec{S}$ pendant $\mathrm{d}t$.

b. Ondes planes progressives monochromatiques (OPPM)

Parmi les solutions de l'équation de d'Alembert en ondes planes progressives selon $\pm\vec{u}_x$, les ondes monochromatiques présentent un intérêt particulier. La forme d'une OPPM est

$$\boldsymbol{\psi(x, t) = \mathcal{A}\cos(\omega\,t - k\,x + \phi)}, \tag{IX.83}$$

où

- $\omega > 0$ est la ***pulsation*** (en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$) ;
- $|k|$ est le ***nombre d'onde*** [angulaire] (en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{m}^{-1}$) : $k = +|k|$ si l'onde se propage selon $+\vec{u}_x$ et $k = -|k|$ si c'est selon $-\vec{u}_x$;
- $\mathcal{A}$ est l'***amplitude*** ;

5. ϕ est parfois appelée le ***déphasage***, voire la « phase » tout court, mais il vaut mieux réserver la dénomination de « phase » pour $\omega\,t - k\,x + \phi$.

- $\omega\,t - k\,x + \phi$ est la ***phase*** de l'onde et ϕ est ***la phase à l'origine*** ※5.

La fonction ψ est ici scalaire et représente soit une composante cartésienne de $\vec{E}$, $\vec{B}$ ou $\vec{A}$, soit le potentiel V.

Injectons cette solution dans l'équation de d'Alembert. On obtient

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \mathcal{A}\cos(\omega\,t - k\,x + \phi)\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0. \tag{IX.84}$$

Ce résultat devant être vrai pour tout x et tout t, k et ω doivent obéir à la ***relation de dispersion***

$$|k| = \frac{\omega}{c}\,. \tag{IX.85}$$

ψ peut être réécrit en fonction de la ***longueur d'onde*** λ (c.-à-d. la période spatiale) et de la ***fréquence*** ν ou de la ***période*** (temporelle) $\boldsymbol{T = 1/\nu}$. On a

$$|k| = \frac{2\,\pi}{\lambda}\ ^{※6} \quad \text{et} \quad \omega = 2\,\pi\,\nu = \frac{2\,\pi}{T}\,. \tag{IX.86}$$

En raison de la linéarité de l'équation de d'Alembert, toute onde plane progressive selon $+\vec{u}_x$ peut s'écrire comme une superposition d'ondes planes monochromatiques :

$$\psi(x, t) = \int_{\omega=0}^{\infty} a(\omega)\cos(\omega\,[t - x/c] + \phi[\omega])\,\mathrm{d}\omega. \tag{IX.87}$$

Pour une onde périodique de période $T = 2\,\pi/\omega_0$, cette transformée de Fourier se réduit à une série de Fourier :

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n\cos(n\,\omega_0\,(t - x/c) + \phi_n). \tag{IX.88}$$

Pour une onde plane progressive monochromatique se propageant dans la direction et le sens indiqués par un vecteur unitaire $\vec{n}$,

$$\psi(\vec{r}, t) = \mathcal{A}\cos(\omega\,t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \phi), \tag{IX.89}$$

où

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\,\vec{n} \tag{IX.90}$$

est le ***vecteur d'onde*** et $\|\vec{k}\| = 2\,\pi/\lambda$. On appelle ***vitesse de phase*** la vitesse v_ϕ à laquelle la phase $\omega\,t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \phi$ se propage. On a

$$v_\phi(\omega) = \frac{\omega}{\|\vec{k}(\omega)\|}\,. \tag{IX.91}$$

Dans le vide, v_ϕ est indépendante de ω et vaut c.

La ***vitesse de groupe*** est quant à elle définie par

$$v_\mathrm{g}(\omega) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\big(\|\vec{k}[\omega]\|\big)}\,. \tag{IX.92}$$

Dans le vide, elle vaut également c, mais hors de celui-ci, on a généralement $v_\phi \neq v_\mathrm{g}$.

c. Notation complexe

Pour étudier les ondes monochromatiques, il est commode d'utiliser la notation complexe, déjà vue en électrocinétique pour décrire l'aspect temporel. Posons ※7

$$\underline{\psi}(\vec{r}, t) = \mathcal{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \phi)}. \tag{IX.93}$$

L'onde ψ se propageant selon $\vec{n} = \vec{k}/\|\vec{k}\|$ est reliée à $\underline{\psi}$ par

$$\psi = \mathrm{Re}\,\underline{\psi}. \tag{IX.94}$$

On peut réécrire $\underline{\psi}$ sous la forme ※8

$$\underline{\psi}(\vec{r}, t) = \underline{\mathcal{A}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \tag{IX.95}$$

6. Attention, le nombre d'onde(s) [linéaire] est parfois défini comme $1/\lambda$.
7. On peut tout aussi bien poser $\underline{\psi}(\vec{r}, t) = \mathcal{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\,t + \phi)}$. Les facteurs $\mathrm{i}\,\omega$ et $\mathrm{i}\,\vec{k}$ ci-dessous doivent alors être remplacés par leurs opposés.
8. Cette expression est également applicable aux vecteurs $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{A}$ en remplaçant $\underline{\mathcal{A}}$ par un vecteur de composantes cartésiennes $(\mathcal{A}_x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi_x}, \mathcal{A}_y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi_y}, \mathcal{A}_z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi_z})$.

avec

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\,\boldsymbol{\phi}}. \tag{IX.96}$$

La dérivée première de $\underline{\psi}$ par rapport à t est

$$\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} = \mathrm{i}\,\omega\,\underline{\psi} \tag{IX.97}$$

et la dérivée seconde vaut

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial t^2} = -\omega^2\,\underline{\psi} \tag{IX.98}$$

De même, la dérivée par rapport à x est

$$\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial x} = -\mathrm{i}\,\frac{\partial(\vec{k}\cdot\vec{r})}{\partial x}\,\underline{\psi} = -\mathrm{i}\,k_x\,\underline{\psi}. \tag{IX.99}$$

Plus généralement, si $\underline{\psi}$ est une onde scalaire ou l'une des composantes cartésiennes d'une onde vectorielle,

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\underline{\boldsymbol{\psi}} = -\mathbf{i}\,\vec{\boldsymbol{k}}\,\underline{\boldsymbol{\psi}}. \tag{IX.100}$$

Pour une onde vectorielle $\underline{\vec{\psi}}$,

$$\mathbf{div}\,\underline{\vec{\boldsymbol{\psi}}} = -\mathbf{i}\,\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\underline{\vec{\boldsymbol{\psi}}} \tag{IX.101}$$

et

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\underline{\vec{\boldsymbol{\psi}}} = -\mathbf{i}\,\vec{\boldsymbol{k}}\times\underline{\vec{\boldsymbol{\psi}}}. \tag{IX.102}$$

Que la fonction soit scalaire ou vectorielle, son laplacien est donné par

$$\boldsymbol{\Delta}\underline{\boldsymbol{\psi}} = -\boldsymbol{k}^2\,\underline{\boldsymbol{\psi}}. \tag{IX.103}$$

Un des intérêts de la notation complexe est que, lorsqu'on se restreint à des combinaisons linéaires de dérivées de $\underline{\psi}$, le facteur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$ apparaît dans tous les termes et peut donc être simplifié.

La superposition de plusieurs ondes de même pulsation et même vecteur d'onde,

$$\psi_i(\vec{r},t) = \mathcal{A}_i\cos(\omega\,t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \phi_i), \tag{IX.104}$$

est une onde ψ dont la représentation complexe est donnée par (IX.95) avec

$$\underline{\mathcal{A}} = \sum_i \underline{\mathcal{A}_i}. \tag{IX.105}$$

L'intensité d'une superposition d'ondes scalaires est facile à calculer en notation complexe. En effet,

$$\boldsymbol{\langle\psi^2\rangle = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\psi^2(\vec{r},t)\,\mathrm{d}t = \frac{\underline{\mathcal{A}}\,\underline{\mathcal{A}}^*}{2} = \frac{|\underline{\mathcal{A}}|^2}{2}}. \tag{IX.106}$$

Pour une superposition d'ondes vectorielles d'amplitude complexe totale $\underline{\vec{\mathcal{A}}} = \sum_i \underline{\vec{\mathcal{A}}_i}$, il suffit de remplacer $\underline{\mathcal{A}}\,\underline{\mathcal{A}}^*$ par $\underline{\vec{\mathcal{A}}}\cdot\underline{\vec{\mathcal{A}}}^*$ et $|\underline{\mathcal{A}}|^2$ par $\|\underline{\vec{\mathcal{A}}}\|^2 = |\underline{\mathcal{A}}_x|^2 + |\underline{\mathcal{A}}_y|^2 + |\underline{\mathcal{A}}_z|^2$ dans l'équation (IX.106). En particulier, si $\underline{\vec{\mathcal{A}}}$ est l'amplitude complexe du champ électrique,

$$I_{\mathrm{lum}} = \varepsilon_0\,c\,\langle E^2\rangle = \frac{\varepsilon_0\,c\,\|\underline{\vec{\mathcal{A}}}\|^2}{2}. \tag{IX.107}$$

Si ϕ_i a la même valeur pour toutes les ondes, $I_{\mathrm{lum}} = \sum_i I_{\mathrm{lum},\,i}$. Sinon, des termes d'interférence apparaissent.

d. Polarisation d'une OPPM

Considérons une OPPM se propageant selon $+\vec{u}_x$. On a alors

$$\begin{cases} E_x = 0, \\ E_y = \mathcal{A}_y\cos(\omega\,t - k\,x + \phi_y), \\ E_z = \mathcal{A}_z\cos(\omega\,t - k\,x + \phi_z). \end{cases} \tag{IX.108}$$

En posant

$$\phi_0 = \phi_y - \phi_z, \tag{IX.109}$$

on obtient

$$\frac{E_z}{\mathcal{A}_z} = \cos(\omega\, t - k\, x + \phi_y - \phi_0) = \cos(\omega\, t - k\, x + \phi_y)\cos\phi_0 + \sin(\omega\, t - k\, x + \phi_y)\sin\phi_0, \tag{IX.110}$$

d'où

$$\frac{E_z}{\mathcal{A}_z} - \frac{E_y}{\mathcal{A}_y}\cos\phi_0 = \sin(\omega\, t - k\, x + \phi_y)\sin\phi_0. \tag{IX.111}$$

Par ailleurs,

$$\frac{E_y}{\mathcal{A}_y}\sin\phi_0 = \cos(\omega\, t - k\, x + \phi_y)\sin\phi_0. \tag{IX.112}$$

En faisant la somme des carrés des deux dernières équations, on obtient

$$\left(\frac{E_y}{\mathcal{A}_y}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{\mathcal{A}_z}\right)^2 - 2\,\frac{E_y}{\mathcal{A}_y}\,\frac{E_z}{\mathcal{A}_z}\cos\phi_0 = \sin^2\phi_0. \tag{IX.113}$$

i. Polarisation rectiligne

Si $\phi_0 \in \{0, \pi\}$ (modulo $2\,\pi$), alors $\sin\phi_0 = 0$ et $\cos\phi_0 = \pm 1 =: s$, donc

$$\left(\frac{E_y}{\mathcal{A}_y}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{\mathcal{A}_z}\right)^2 - 2\,s\,\frac{E_y}{\mathcal{A}_y}\,\frac{E_z}{\mathcal{A}_z} = \left(\frac{E_y}{\mathcal{A}_y} - s\,\frac{E_z}{\mathcal{A}_z}\right)^2 = 0, \tag{IX.114}$$

soit la relation linéaire

$$E_z = \frac{s\,\mathcal{A}_z}{\mathcal{A}_y}\,E_y. \tag{IX.115}$$

Le vecteur $\vec{E}$ oscille donc dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}')$, où $\vec{u}'$ fait un angle (orienté par $\vec{u}_x$)

$$\theta = \arctan\frac{s\,\mathcal{A}_z}{\mathcal{A}_y} \tag{IX.116}$$

avec $\vec{u}_y$. On dit que la ***polarisation*** de $\vec{E}$[※9] est ***rectiligne*** selon $\vec{u}'$.

ii. Polarisation elliptique

Si $\phi_0 \notin \{0, \pi\}$ (modulo $2\,\pi$), on reconnaît (?) dans (IX.113) l'équation d'une ellipse. En effet, l'équation d'une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe $b \leqslant a$ selon des vecteurs orthogonaux $\vec{u}_Y$ et $\vec{u}_Z$ est

$$\frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1. \tag{IX.117}$$

Si les vecteurs unitaires $\vec{u}_Y$ et $\vec{u}_Z$ sont les images de $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ par une rotation d'axe $\vec{u}_x$ et d'angle $\theta \in\,]-\pi/2, \pi/2]$ et que Y et Z sont les composantes de $\vec{E}$ dans $(\vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$ (c.-à-d. $Y\,\vec{u}_Y + Z\,\vec{u}_Z = E_y\,\vec{u}_y + E_z\,\vec{u}_z$),

$$\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\,E_y + \sin\theta\,E_z \\ -\sin\theta\,E_y + \cos\theta\,E_z \end{bmatrix}, \tag{IX.118}$$

où « $^{\mathsf{T}}$ » désigne la transposée de la matrice. On obtient donc

$$E_y^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) + E_z^2\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2}\right) - 2\,E_y\,E_z\sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 1. \tag{IX.119}$$

En identifiant les termes dans (IX.113) et (IX.119), on obtient

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} = \frac{1}{\mathcal{A}_y^2\sin^2\phi_0}\,, \tag{IX.120}$$

$$\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2} = \frac{1}{\mathcal{A}_z^2\sin^2\phi_0}\,, \tag{IX.121}$$

$$\sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{\cos\phi_0}{\mathcal{A}_y\,\mathcal{A}_z\sin^2\phi_0}\,. \tag{IX.122}$$

La polarisation est dite ***elliptique***. Le cas de la polarisation rectiligne correspond à une ellipse dégénérée : le demi-petit axe est nul et l'ellipse se réduit à un segment de longueur $2\,a$ faisant un angle θ avec $\vec{u}_y$.

9. Rappelons que $\vec{B}$ fait un angle (orienté par $\vec{u}_x$) de $\pi/2$ avec $\vec{E}$.

Cherchons les caractéristiques de cette ellipse. En ajoutant (IX.120) et (IX.121), on a

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{\mathcal{A}_y^2} + \frac{1}{\mathcal{A}_z^2}\right) \frac{1}{\sin^2 \phi_0} := \alpha. \tag{IX.123}$$

La différence (IX.121) − (IX.120) donne

$$\cos(2\,\theta) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \left(\frac{1}{\mathcal{A}_z^2} - \frac{1}{\mathcal{A}_y^2}\right) \frac{1}{\sin^2 \phi_0} := \beta. \tag{IX.124}$$

L'équation (IX.122) peut être réécrite

$$\sin(2\,\theta) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{2\cos\phi_0}{\mathcal{A}_y\,\mathcal{A}_z \sin^2 \phi_0} := \gamma. \tag{IX.125}$$

La combinaison $(\text{IX.124})^2 + (\text{IX.125})^2$ donne

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \tag{IX.126}$$

(la solution négative est exclue car $b \leqslant a$), d'où, en faisant la somme et la différence de (IX.123) et (IX.126),

$$a = \sqrt{\frac{2}{\alpha - \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}}, \tag{IX.127}$$

$$b = \sqrt{\frac{2}{\alpha + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}}. \tag{IX.128}$$

L'ellipse est un cercle si $\beta = \gamma = 0$, c.-à-d. si $\mathcal{A}_y = \mathcal{A}_z$ et $\phi_0 = \pm\pi/2$ (modulo π) ; la polarisation est alors qualifiée plus spécifiquement de ***circulaire***.

Les équations (IX.124) et (IX.125) permettent de déterminer θ. On peut écrire que

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{\gamma}{\beta} \quad (\text{modulo } \pi/2) \tag{IX.129}$$

et ne retenir que la solution dans $]-\pi/2, \pi/2]$ qui soit du signe de γ (les signes de $\sin(2\,\theta)$ et γ sont identiques d'après (IX.125)). On peut aussi écrire directement que [※10]

$$\theta = \arctan \frac{\gamma}{\beta + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}. \tag{IX.130}$$

Remarque. La lumière naturelle n'est pas polarisée car elle est émise par de nombreuses sources incohérentes, notamment les atomes de la photosphère solaire lorsqu'ils se désexcitent. Certains phénomènes (réflexion sur une surface, traversée d'un filtre polariseur, laser…) permettent néanmoins d'obtenir de la lumière partiellement ou totalement polarisée. ■

iii. Sens de rotation de $\vec{E}$

La polarisation est dite *gauche* si, en un point donné, l'extrémité de $\vec{E}$ décrit au cours du temps une ellipse dans le sens trigonométrique défini par le vecteur d'onde, c.-à-d. quand on regarde l'onde venant vers soi ; elle est dite *droite* si $\vec{E}$ tourne dans le sens horaire. [※11]

Pour déterminer le sens de la polarisation, on peut calculer le vecteur $\vec{E} \times \partial\vec{E}/\partial t$. En effet, si la polarisation

10. De manière générale, si $\rho\cos\phi = A$ et $\rho\sin\phi = B$, avec $\rho > 0$ et $\phi \in]-\pi, \pi]$, alors $\rho = \sqrt{A^2 + B^2}$ et

$$\rho + \rho\cos\phi = 2\,\rho\cos^2(\phi/2) = A + \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Par ailleurs, $B = 2\,\rho\cos(\phi/2)\sin(\phi/2)$, donc, si $(A, B) \neq (0, 0)$, on a

$$\frac{\phi}{2} = \arctan \frac{B}{A + \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

La solution modulo π n'est pas à considérer car $\phi/2$ est nécessairement dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2] = \arctan(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$. On applique ici cette méthode avec $A = \beta$, $B = \gamma$ et $\phi = 2\,\theta$.

11. La convention opposée, définie à partir de la source de l'onde plutôt que de l'observateur, est utilisée dans certaines branches de la physique. La convention adoptée ici est cohérente avec celle appliquée en chimie : pour un observateur recevant de la lumière polarisée ayant traversé une substance, cette substance est « dextrogyre » (des mots latins *dexter*, c.-à-d. « droite », et *gyrare*, « tourner ») si elle fait tourner le plan de polarisation de la lumière vers la droite ; elle est « lévogyre » (du latin *laevus*, « gauche ») si elle le fait tourner vers la gauche.

est gauche, alors $\vec{E}(t) \times \vec{E}(t + \mathrm{d}t)$ est selon $+\vec{u}_x$ pour un intervalle de temps infinitésimal positif $\mathrm{d}t$. Or

$$\vec{E}(t) \times \vec{E}(t + \mathrm{d}t) \approx \vec{E}(t) \times \left(\vec{E}(t) + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right) = \vec{E}(t) \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,\mathrm{d}t. \tag{IX.131}$$

Comme $\mathrm{d}t > 0$, **si le vecteur $\vec{E} \times \partial\vec{E}/\partial t$ est selon $+\vec{u}_x$, la polarisation est gauche ; s'il est selon $-\vec{u}_x$, elle est droite.**

$$\begin{aligned}\vec{E} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{A}_y \cos(\omega\,t - k\,x + \phi_y) \\ \mathcal{A}_z \cos(\omega\,t - k\,x + \phi_z)\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega\,\mathcal{A}_y \sin(\omega\,t - k\,x + \phi_y) \\ -\omega\,\mathcal{A}_z \sin(\omega\,t - k\,x + \phi_z)\end{bmatrix} \\ &= -\omega\,\mathcal{A}_y\,\mathcal{A}_z\,(\cos[\omega\,t - k\,x + \phi_y]\sin[\omega\,t - k\,x + \phi_z] \\ &\qquad - \sin[\omega\,t - k\,x + \phi_y]\cos[\omega\,t - k\,x + \phi_z])\,\vec{u}_x \\ &= -\omega\,\mathcal{A}_y\,\mathcal{A}_z \sin(\phi_z - \phi_y)\,\vec{u}_x = \omega\,\mathcal{A}_y\,\mathcal{A}_z \sin\phi_0\,\vec{u}_x.\end{aligned} \tag{IX.132}$$

La polarisation est donc elliptique droite si $\phi_0 \in]-\pi, 0[$ et gauche si $\phi_0 \in]0, \pi[$.

3. Ondes sphériques

Une autre solution intéressante de l'équation de d'Alembert est constituée par les ondes sphériques. Celles-ci correspondent notamment à l'émission isotrope par une source ponctuelle. Le champ électromagnétique ne dépend alors plus que de la distance r à la position O de la source. En coordonnées sphériques,

$$\Delta\psi(r, t) = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial(r^2\,\partial\psi/\partial r)}{\partial r} \tag{IX.133}$$

en raison de l'isotropie. On a donc

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial(r^2\,\partial\psi/\partial r)}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \tag{IX.134}$$

Or

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial(r^2\,\partial\psi/\partial r)}{\partial r} = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2(r\,\psi)}{\partial r^2}, \tag{IX.135}$$

donc

$$\frac{\partial^2(r\,\psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2(r\,\psi)}{\partial t^2} = 0. \tag{IX.136}$$

La fonction $r\,\psi(\vec{r}, t)$ obéit à la même équation qu'une onde plane, donc

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{r}\,(F[r - c\,t] + G[r + c\,t]). \tag{IX.137}$$

Le premier terme est une onde divergente émise par la source située en O. Le deuxième terme est une onde convergeant vers O. Il est généralement nul, sauf si la source est entourée par un miroir sphérique qui renvoie vers elle la lumière qu'elle a émise.

À grande distance de la source, l'onde sphérique peut être assimilée à une onde plane.