Chapitre IV

Conducteurs à l'équilibre

A. Isolants et conducteurs. Métaux

Un conducteur est un corps qui contient des charges mobiles. Lorsque le nombre de celles-ci tend vers l'infini, le conducteur est dit « idéal ». Aucun conducteur n'est rigoureusement idéal, mais certains s'en approchent, notamment les *métaux*.

Dans un atome isolé, les électrons liés au noyau ont des énergies prenant des valeurs discrètes. Les électrons non excités qui ont l'énergie la plus élevée sont appelés ***électrons de valence***. Lorsqu'on leur apporte une énergie suffisante, l'atome devient ionisé. Les électrons arrachés à l'atome sont libres et leur énergie peut prendre des valeurs continues.

Dans un solide, au contraire, l'énergie d'un électron ne prend pas des valeurs discrètes mais, en raison des interactions avec les atomes voisins, des valeurs continues dans un certain nombre d'intervalles appelés ***bandes d'énergie***. On appelle ***bande de valence*** la bande d'énergie la plus élevée contenant des électrons liés aux noyaux. Dans la ***bande de conduction***, d'énergie immédiatement supérieure, les électrons appartiennent en commun à tous les atomes du solide et sont donc délocalisés : ils sont libres de se déplacer dans tout le conducteur (mais pas d'en sortir !).

Dans un ***isolant***, les bandes de valence et de conduction sont nettement séparées en énergie et la bande de conduction est quasi vide. Dans un ***conducteur***, en revanche, les deux bandes se chevauchent et les électrons passent aisément de l'une à l'autre : il y a donc toujours des électrons de conduction. Les ***semi-conducteurs*** sont un cas intermédaire dans lequel les bandes sont disjointes mais proches : une faible excitation suffit donc à peupler la bande de conduction à partir de la bande de valence.

Les conducteurs considérés dans ce qui suit seront presque toujours des métaux, mais il existe d'autres types de conducteurs, par exemple les électrolytes : dans ces solutions, ce sont les ions qui sont mobiles, pas les électrons.

B. Propriétés des conducteurs à l'équilibre

1. Propriétés générales

Un *conducteur à l'équilibre* est un conducteur dans lequel les charges libres sont immobiles. Il possède les propriétés suivantes :

1. À l'équilibre, la somme des forces sur les charges libres doit être nulle. En l'absence d'autres forces, cela signifie que la force électrique exercée sur les charges libres est nulle, donc que

$$\vec{E} = \vec{0} \quad \textbf{à l'intérieur}. \tag{IV.1}$$

   Si l'on impose un champ extérieur, les charges libres se déplacent et créent un champ induit. Ce réarrangement cesse lorsque le champ induit compense le champ extérieur et que le champ *total*, $\vec{E} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{induit}}$, *est nul à l'intérieur* du conducteur. Le processus est quasi instantané dans les métaux (moins dans les électrolytes, car l'inertie des ions est bien supérieure à celle des électrons) ;

2. Comme $\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$, que $\vec{E} = \vec{0}$ à l'intérieur et que V est continu, le potentiel

$$V \textbf{ est uniforme dans tout le conducteur, tant son volume que sa surface}. \tag{IV.2}$$

   Le conducteur constitue ainsi une région équipotentielle.

   Une conséquence immédiate est qu'**une ligne de champ ne peut relier un point d'un conducteur à un autre point du même conducteur**. En effet, d'après l'expression $\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$, une ligne de champ est orientée selon les potentiels décroissants. Or tous les points d'un conducteur sont au même potentiel.

3. On déduit immédiatement de la nullité de $\vec{E}$ que

$$\textbf{la densité volumique de charge } \varrho \textbf{ est nulle à l'intérieur} \tag{IV.3}$$

puisque $\operatorname{div} \vec{E} = \varrho/\varepsilon_0$;

4. Les charges mobiles sont libres de se déplacer dans le conducteur, pas de le quitter (sauf champ extérieur exceptionnellement intense), donc

$$\textbf{la charge nette est entièrement en surface}. \tag{IV.4}$$

(Il y a en fait une charge nette sur une épaisseur de quelques atomes à la surface.) La *densité surfacique de charge* peut donc être non nulle.

Remarque. Précisons tout de suite que « à l'intérieur du conducteur » signifie « dans la matière du conducteur ». Il s'agit de l'intérieur matériel, physique, et non de l'intérieur topologique, géométrique, du conducteur. La différence est importante pour les conducteurs contenant des *cavités*. Il peut en effet y avoir des charges à la surface de celles-ci. ■

Les propriétés énoncées ci-dessus sont valables à une échelle intermédiaire, ***mésoscopique***, c'est-à-dire petite devant la taille du conducteur, mais suffisamment grande pour que les notions de champ moyen $\vec{E}$ et de densité volumique de charge ϱ soient bien définies. Il y a évidemment *des* charges à l'intérieur à l'échelle microscopique (protons, électrons) et un champ non nul en leur voisinage immédiat. Ce qu'affirment les points 3 et 4, c'est que, à l'échelle mésoscopique, la charge *nette* est nulle en tout point à l'intérieur mais qu'elle peut être non nulle en surface, y compris à l'échelle macroscopique.

2. Théorème de Coulomb. Pression électrostatique

Le champ **juste à l'extérieur du conducteur**, au voisinage immédiat d'un point M de celui-ci, vaut

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}_{\text{ext}} \qquad \textbf{(théorème de Coulomb)}, \tag{IV.5}$$

où σ est la densité surfacique de charge sur le conducteur en M et $\vec{n}_{\text{ext}}$ est un vecteur unitaire normal à la surface du conducteur en M et dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.

En effet, le champ électrique subit une discontinuité $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \sigma/\varepsilon_0\,\vec{n}_{1\to 2}$ au voisinage d'une nappe chargée (cf. éq. (II.61)). En prenant l'intérieur du conducteur comme zone n° 1 et l'extérieur comme zone n° 2, on obtient le résultat puisque $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$.

Une conséquence de (IV.5) est que **les lignes de champ sont normales à la surface d'un conducteur au voisinage immédiat de celui-ci ; elles en partent (resp. vont vers lui) si $\sigma > 0$ (resp. $\sigma < 0$)**.

L'équation (IV.5) permet aussi de calculer σ à partir du champ au voisinage extérieur de la surface d'un conducteur : $\sigma = \varepsilon_0\,\vec{E}_{\text{ext}} \cdot \vec{n}_{\text{ext}}$.

Remarque. L'équation (IV.5) paraît en désaccord avec le résultat obtenu pour un plan infini portant une densité surfacique σ (éq. (II.62)) : dans chacune des deux zones Z_i (avec $i \in [\![1, 2]\!]$) de part et d'autre du plan, $\vec{E}_i = \sigma/(2\,\varepsilon_0)\,\vec{n}_{j\to i}$, où j est l'indice de l'autre zone et $\vec{n}_{j\to i}$ est un vecteur unitaire, normal au plan et dirigé de Z_j vers Z_i. Au voisinage d'un point M juste à l'extérieur du conducteur, la portion de surface du conducteur constituée par les points à proximité de M est semblable à un plan, vue de M. On s'attendrait donc à ce que $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}^{\text{ext}}_{\text{prox}} = \sigma/(2\,\varepsilon_0)\,\vec{n}_{\text{ext}}$, soit la moitié du résultat correct ! L'autre moitié vient en fait de la charge nette située à plus grande distance sur la surface du conducteur : celle-ci crée un champ $\vec{E}_{\text{dist}} = \sigma/(2\,\varepsilon_0)\,\vec{n}_{\text{ext}}$ au voisinage de M, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur. Le champ créé à l'intérieur du conducteur par les points de la surface proches de M valant $\vec{E}^{\text{int}}_{\text{prox}} = -\sigma/(2\,\varepsilon_0)\,\vec{n}_{\text{ext}}$, on retrouve bien aussi que $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{E}^{\text{int}}_{\text{prox}} + \vec{E}_{\text{dist}} = \vec{0}$. Un conducteur a nécessairement un intérieur et un extérieur, donc sa surface entière n'est pas réductible à un plan infini, même à son voisinage. ■

Considérons un petit voisinage d'aire $đS$ d'un point M de la surface du conducteur. Ce voisinage porte une charge $\sigma\,đS$ et est soumis à la force exercée par les charges « dist » situées hors de $đS$,

$$đ\vec{F}_{\text{dist}\to đS} = (\sigma\,đS)\,\vec{E}_{\text{dist}}. \tag{IV.6}$$

(Le champ $\vec{E}_{\text{prox}}$ créé par les charges « prox » situées sur $đS$ n'intervient pas : il n'y a pas lieu de prendre en compte les forces intérieures.) Comme $\vec{E}_{\text{dist}} = \sigma/(2\,\varepsilon_0)\,\vec{n}_{\text{ext}}$, l'élément $đS$ est soumis a la force

$$đ\vec{F}_{\text{dist}\to đS} = P\,đ\vec{S}, \tag{IV.7}$$

où $đ\vec{S} = đS\,\vec{n}_{\text{ext}}$ et

$$\boldsymbol{P = \frac{\sigma^2}{2\,\varepsilon_0}} \tag{IV.8}$$

est la ***pression électrostatique*** exercée sur la surface du conducteur.

3. Notions de « terre » et de « masse » en électricité

En première approximation, on peut traiter la Terre (avec une majuscule, c.-à-d. la planète) comme un conducteur sphérique. La charge surfacique qu'elle porte étant quasi nulle, son potentiel peut être considéré comme nul (cf. éq. (I.45)) avec la convention $V(\infty) = 0$. La Terre est par ailleurs suffisamment conductrice et vaste pour fournir à tout conducteur en contact électrique avec elle tous les électrons qui manquent à celui-ci ou pour permettre l'écoulement de tous ceux en trop, ceci quasi instantanément et sans que le potentiel terrestre soit modifié. La Terre impose donc un potentiel nul à tout conducteur relié à la ***terre*** (avec une minuscule, c.-à-d. le sol) par un fil métallique (un ***fil de terre***). Pour éviter d'être électrocuté lorsqu'on les touche, les appareils électriques sont souvent branchés sur des ***prises de terre***, c.-à-d. des prises comprenant une borne reliant le châssis de l'appareil à la terre.

Interposons maintenant entre la terre et le conducteur un générateur de tension $U = V_A - V_B$, où la borne A du générateur est connectée au conducteur et la borne B l'est à la terre. Le potentiel du conducteur devient alors U et celui de la Terre reste nul.

On appelle ***masse*** tout conducteur jouant le même rôle de 0 du potentiel (mais pas de protection contre les chocs électriques) que la terre dans les appareils électriques. S'il y a plusieurs appareils dans un circuit, leurs masses doivent être connectées entre elles ou l'être à la terre pour que les potentiels à leurs bornes soient comparables.

4. Effet de pointe

À grande distance d'un conducteur chargé, les lignes de champ sont radiales puisque le terme monopolaire domine. Au voisinage du conducteur, en revanche, elles sont perpendiculaires à la surface. Elles sont donc plus concentrées au voisinage d'un point où le conducteur est convexe (c.-à-d. présente une bosse) et espacées là où il est concave (c.-à-d. présente un creux). Pour la même raison, en un point où le conducteur est convexe, plus la courbure de la surface est forte, plus les lignes de champ sont concentrées, donc plus l'intensité du champ électrique et la densité surfacique de charge (d'après la relation (IV.5)) sont élevées. Il ne s'agit en fait que de tendances, car le champ électrique au voisinage extérieur de la surface dépend de la forme complète du conducteur, pas seulement de la courbure locale[※1].

Il est en revanche certain que **la charge nette s'accumule près des pointes** et que **le champ électrique est intense au voisinage (extérieur) de celles-ci**. Si l'intensité du champ dépasse un seuil, appelé ***champ disruptif*** et dépendant de l'isolant (par exemple l'air) en contact avec le conducteur, l'isolant s'ionise. Un canal conducteur apparaît alors dans lequel se précipitent les charges en excès[※2] : le conducteur se décharge. Ce courant de charges produit une émission lumineuse, l'***arc électrique***.

C'est le principe du ***paratonnerre*** inventé par Benjamin Franklin. Un paratonnerre est constitué de pointes métalliques et d'un fil de métal qui les relie au sol. Lorsque des charges négatives s'accumulent à la base d'un nuage pendant un orage, des charges positives apparaissent sur terre. Quand l'air s'ionise sous l'effet du champ créé par toutes ces charges, il devient momentanément conducteur et la ***foudre*** tombe. L'***éclair*** est l'arc électrique correspondant. Le paratonnerre n'empêche pas la foudre de tomber, mais a pour objet, en provoquant une concentration de charges positives dans les pointes, de canaliser la chute de la foudre vers celles-ci et de l'envoyer se perdre directement dans la terre, où elle ne présente pas de danger.

Pour illustrer l'effet de la courbure de manière plus quantitative, considérons un cas où le calcul est aisé : celui de deux conducteurs sphériques de rayons respectifs R_1 et R_2. Relions-les par un fil conducteur, suffisamment fin pour que la charge qu'il porte et le champ qu'il crée soient négligeables. Les sphères conductrices sont placées loin l'une de l'autre, de telle sorte que l'expression (I.45) pour le potentiel d'une sphère s'applique à chacune. Les potentiels des sphères valent donc $V_1 = \sigma_1 R_1/\varepsilon_0$ et $V_2 = \sigma_2 R_2/\varepsilon_0$, où σ_1 et σ_2 sont les densités surfaciques de charge de chacune. L'ensemble constitué par les sphères et le fil forme alors un unique conducteur, de potentiel $V = V_1 = V_2$, d'où

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\|\vec{E}_2^{\text{ext}}\|}{\|\vec{E}_1^{\text{ext}}\|} \tag{IV.9}$$

d'après le théorème de Coulomb. Plus la courbure $1/R$ est forte, plus le champ $\vec{E}^{\text{ext}}$ est intense et plus les charges surfaciques sont concentrées.

1. Voir dans l'*American Journal of Physics* les articles « The lightning-rod fallacy » par R. H. Price & R. J. Crowley (1985, vol. 53, 843) et « Of lightning rods, charged conductors, curvature, and things » par I. M. Benn & S. T. Shanahan (1991, vol. 59, 658).
2. Ce phénomène peut provoquer un ***claquage*** dans un condensateur.

5. Cavités dans les conducteurs

a. Cavité vide de charges. Cage de Faraday

Considérons un conducteur à l'équilibre muni d'une cavité. Le potentiel a la même valeur en tout point du conducteur, y compris sa surface extérieure et ses éventuelles surfaces intérieures. Si l'intérieur de la cavité est vide de charges ※3, le potentiel y est le même que dans la matière du conducteur. En effet, d'après le théorème de l'extrémum (§ II.c.3), il n'y a pas d'extrémum du potentiel dans la cavité puisqu'elle ne contient pas de charges. Le potentiel sur le pourtour de la cavité étant identique en tout point, le potentiel dans la cavité lui est égal. Le champ est donc nul dans la cavité. D'après le théorème de Coulomb, la densité surfacique de charge est aussi nulle sur la surface de la cavité.

C'est le principe de fonctionnement de la cage de Faraday : à l'intérieur d'une cage métallique, le champ est nul, quelle que soit l'intensité du champ électrostatique à l'extérieur. Il n'est même pas nécessaire que la cage soit continue : une cage grillagée fait l'affaire pour peu que la taille de la maille ne soit pas trop grande. La cage de Faraday protège l'intérieur du champ produit par des sources extérieures tant que celui-ci est électrostatique ou qu'il varie suffisamment lentement avec le temps.

b. Cavité contenant des charges

Considérons maintenant une cavité dont l'intérieur contient une charge nette Q_{cav} (cette charge n'appartient pas au conducteur). Appliquons la forme intégrale du théorème de Gauss à une surface fermée $\mathcal{S}$ entourant la cavité et contenue dans la matière du conducteur. Le champ électrique étant nul dans cette dernière, le flux du champ à travers $\mathcal{S}$ est nul, donc la charge $Q_{\mathcal{S}}$ à l'intérieur de $\mathcal{S}$ aussi. Or $Q_{\mathcal{S}} = Q_{\mathrm{cav}} + Q_{\mathrm{cond}}^{\mathrm{int}}$, où $Q_{\mathrm{cond}}^{\mathrm{int}}$ est la charge nette portée par le conducteur à la surface de la cavité. On a donc $Q_{\mathrm{cond}}^{\mathrm{int}} = -Q_{\mathrm{cav}}$. Si le conducteur est globalement neutre, il porte par conséquent une charge $Q_{\mathrm{cond}}^{\mathrm{ext}} = +Q_{\mathrm{cav}}$ sur sa surface extérieure.

6. Influence électrostatique. Théorème des éléments correspondants

Approchons un corps A portant une charge négative d'un conducteur métallique B neutre. Les électrons de ce dernier vont s'éloigner de A, ce qui fait apparaître une charge positive sur le côté de B tourné vers A et une charge négative de l'autre côté. Si B est relié à la terre par un fil conducteur, une partie des électrons quittent B et vont se perdre dans la terre. Il suffit alors de couper le fil pour donner à B ※4 une charge positive : le conducteur B a été ***chargé par l'influence*** du corps A.

Considérons maintenant deux conducteurs A et B, et prenons un tube de champ ※5 T connectant ces deux conducteurs. Appliquons le théorème de Gauss à la surface de Gauss constituée des portions disjointes suivantes :

- la surface $\mathcal{S}_T$ du tube de champ ;
- une surface $\mathcal{S}_A$ située à l'intérieur de A et fermant le tube à cette extrémité ;
- une surface $\mathcal{S}_B$ située à l'intérieur de B et fermant l'autre extrémité du tube.

Les surfaces de A et B connectées par le tube de champ sont dites « en correspondance ». On a

$$\int_{\mathcal{S}_A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\mathcal{S}_B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\mathcal{S}_T} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}, \tag{IV.10}$$

où $Q_{\mathrm{int}} = Q_A + Q_B$, Q_A et Q_B étant respectivement les charges nettes portées par A et B à l'intérieur de la surface de Gauss. L'intégrale $\int_{\mathcal{S}_T} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ est nulle car $\vec{E}$ est perpendiculaire à $\mathrm{d}\vec{S}$ sur $\mathcal{S}_T$ par construction. Les intégrales $\int_{\mathcal{S}_A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ et $\int_{\mathcal{S}_B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ sont également nulles puisque $\mathcal{S}_A$ et $\mathcal{S}_B$ sont dans les conducteurs A et B, et donc que $\vec{E} = \vec{0}$ sur ces surfaces. On obtient donc le ***théorème des éléments correspondants*** :

$$\boldsymbol{Q_A = -Q_B,} \tag{IV.11}$$

où Q_A et Q_B sont les charges portées par les éléments correspondants de deux conducteurs A et B.

On dit que deux conducteurs sont en ***influence totale*** si toutes les lignes liées à un conducteur le connectent à l'autre. Sinon, l'influence est seulement ***partielle***. Si un conducteur entoure entièrement l'autre, toutes les lignes de champ du second sont reliées au premier ; ils sont donc en influence totale.

3. On veut dire par là que la densité nette de charge est nulle en tout point, pas seulement que la charge totale dans la cavité est nulle.
4. Après la coupure du fil, B est ***électriquement isolé*** : aucune charge ne peut arriver sur lui ni en partir. Cela ne veut pas dire qu'il est isolé *spatialement*, ni au sens de ce terme en mécanique : B est soumis à la force exercée par A !
5. Rappelons qu'un ***tube de champ*** est un faisceau de lignes de champ, c.-à-d. l'ensemble des lignes traversant une surface donnée.

7. Théorème d'unicité (hors programme)

a. Énoncé

Nous avons déjà énoncé un théorème d'unicité au § II.c.3. Rappelons que si V est solution, dans un domaine $\mathcal{D}$, de $\Delta V = -\varrho/\varepsilon_0$ (l'équation de Poisson), alors la donnée soit de V, soit de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \cdot \vec{n}$ en chaque point frontière de $\mathcal{D}$ (conditions aux limites) détermine V de manière unique sur $\mathcal{D}$. Donc, si une expression $f(M)$ proposée pour le potentiel V (quelle que soit la façon dont on l'a obtenue) satisfait l'équation de Poisson en tout point M de $\mathcal{D}$ ainsi que les conditions imposées au potentiel aux bornes de $\mathcal{D}$, alors l'expression proposée pour le potentiel est la bonne : $V(M) = f(M)$ pour tout $M \in \mathcal{D}$. (On ne peut en revanche rien dire en dehors de $\mathcal{D}$.)

Ce théorème s'applique en particulier à l'espace séparant un ensemble de conducteurs, et ce d'autant plus facilement que le potentiel a la même valeur en tout point de la surface d'un conducteur. Cependant, pour des conducteurs isolés notamment, c'est souvent la charge totale du conducteur qui est connue, pas le potentiel ni la densité surfacique de charge (rappelons que la charge ne peut être qu'en surface).

Il existe cependant une version du ***théorème d'unicité pour les conducteurs***.

> **Considérons un domaine $\mathcal{D}$ contenant une densité de charge $\varrho(M)$ et dans laquelle sont plongés des conducteurs dont soit le potentiel V_i, soit la charge *totale* Q_j sur la surface extérieure sont imposés. Alors, l'équation de Poisson admet une seule solution $V(M)$ compatible avec les conditions aux limites V_i et Q_j et la condition à l'infini sur $V(M)$.**
>
> **Ce théorème est également valable si le domaine $\mathcal{D}$ est la cavité d'un conducteur dont soit le potentiel V_{cav}, soit la charge totale Q_{cav} sur la surface intérieure sont imposés. La condition sur $V(M)$ à l'infini est alors remplacée soit par la donnée de V_{cav}, soit par celle de Q_{cav}.**

Attention, une expression vérifiant l'équation de Poisson entre les conducteurs et les conditions aux limites à la surface de ceux-ci ne peut être extrapolée à l'intérieur des conducteurs.

b. Application à un conducteur creux. Écran électrostatique

i. Charges fixées

Considérons un conducteur B creux, électriquement isolé, de charge Q_B (éventuellement nulle), dans la cavité duquel on a introduit un corps A portant une charge Q_A. À l'extérieur de B [※6], se trouve un corps C (ou plusieurs) dont le potentiel ou la charge totale est imposé. D'après la discussion du § IV.B.5.*b*, le conducteur B porte sur sa surface intérieure une charge $-Q_A$ et sur sa surface extérieure $\mathcal{S}_{\mathrm{ext}}$ une charge $Q_A + Q_B$. Le potentiel créé par B est le même en tout point à l'extérieur de B que celui que produirait un conducteur plein [※7] B', de même forme extérieure que B et portant une charge $Q_A + Q_B$. En effet, les formes extérieures $\mathcal{S}_{\mathrm{ext}}$ et $\mathcal{S}'_{\mathrm{ext}}$ de B et B' étant identiques, et la charge portée par B' étant sur $\mathcal{S}'_{\mathrm{ext}}$ et de valeur totale égale à celle sur $\mathcal{S}_{\mathrm{ext}}$, les conditions aux limites sur $\mathcal{S}_{\mathrm{ext}}$ et $\mathcal{S}'_{\mathrm{ext}}$ sont les mêmes. Le théorème d'unicité permet immédiatement de conclure à l'identité des potentiels à l'extérieur et, de là, à celle des champs. Le théorème de Coulomb permet enfin d'affirmer que la densité surfacique de charge est la même en tout point de $\mathcal{S}_{\mathrm{ext}}$ que celle sur $\mathcal{S}'_{\mathrm{ext}}$. Pour un corps B sphérique de rayon R, par exemple, on obtient

$$V(r > R) = \frac{Q_A + Q_B}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}, \tag{IV.12}$$

quelle que soit la forme de la cavité, sa position et celle de A.

Quant au champ dans la cavité, il est entièrement déterminé par les charges Q_A et $-Q_A$ aux frontières de celle-ci d'après le théorème d'unicité : le corps C à l'extérieur de B n'a aucune influence sur le potentiel dans la cavité et sur la densité surfacique de charge sur celle-ci, ce qu'on avait déjà trouvé dans le cas d'une charge Q_A nulle (cf. § IV.B.5.*a*).

ii. Potentiel imposé au conducteur

Relions le conducteur B à la terre et faisons de même par la pensée pour B'. Les potentiels de B et B' sont donc nuls. Comme B' ne porte de charge nette en aucun point, le potentiel créé par B' est nul partout. Le potentiel créé par B est donc nul hors de $\mathcal{S}_{\mathrm{ext}}$ d'après le théorème d'unicité (mais pas dans la cavité). La charge Q_A présente dans la cavité de B est ainsi sans influence à l'extérieur (topologique) de B : un conducteur creux relié à la terre fait office d'écran à une charge située dans une cavité.

Là encore, et pour les mêmes raisons que dans le cas où $Q_B = 0$, le corps C est sans influence sur le potentiel dans la cavité et sur la distribution des charges à la surface de celle-ci.

6. Dans tout ce qui suit, l'« extérieur » doit être pris au sens topologique, pas matériel : il ne contient ni la cavité de B ni A.
7. Ou creux, mais dont la cavité est vide de charge.

On a ci-dessus relié B à la terre par commodité, mais on obtient le même résultat si B est relié à un générateur lui imposant une tension V_B fixée. De même si c'est le potentiel V_A de A qui est imposé plutôt que sa charge Q_A.

Dans tous les cas où V_B est imposé, le conducteur creux B fait office d'***écran électrostatique*** entre son intérieur et son extérieur topologiques.

c. Méthode des images (hors programme)

Considérons un conducteur K relié à la terre et dont l'une des surfaces est le plan (Oxy). Une charge q est située en un point P à l'altitude $z = h > 0$ au-dessus de O. Cherchons à déterminer le potentiel $V_{q,K}$ dans le demi-espace $z > 0$. D'après le théorème d'unicité, si l'on trouve une solution respectant l'équation de Poisson pour $z > 0$ et les conditions aux limites de ce demi-espace, alors, dans celui-ci, il s'agit de *la* solution.

Remplaçons le conducteur par une charge $q' = -q$ située en un point P' symétrique de P par rapport au plan $z = 0$. Le potentiel créé par q et q' en tout point M de l'espace est

$$V_{q,q'}(M) = V_q(M) + V_{q'}(M) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM} - \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,P'M}\,. \tag{IV.13}$$

Il est nul sur le plan $z = 0$ et quand $PM \to \infty$. Il respecte par ailleurs la même équation de Poisson que le système $\{q, K\}$ pour $z > 0$ puisque les charges (q) ont la même distribution dans ce demi-espace. On a donc $V_{q,K} = V_{q,q'}$ pour $z \geqslant 0$. (On a évidemment $V_{q,K} \neq V_{q,q'}$ pour $z < 0$ puisque le potentiel est uniforme dans un conducteur.)

La procédure de calcul du potentiel hors du conducteur utilisée ci-dessus est appelée ***méthode des images***, car le point P' où est placée la charge q' est l'image par « réflexion sur le miroir plan » $z = 0$ du point P où se trouve q. Elle peut être généralisée à un nombre quelconque de charges en prenant pour chacune une charge image de valeur opposée.

On peut également calculer la densité surfacique de charge sur le conducteur. Supposons la charge source en $(x = 0, y = 0, h)$. Pour tout $z > 0$, $PM = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}$ et $P'M = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}$, donc

$$V_{q,K}(M) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} - \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} \tag{IV.14}$$

et

$$\vec{E}_{q,K}(M) = \frac{q\,(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + [z-h]\,\vec{u}_z)}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(x^2 + y^2 + [z-h]^2)^{3/2}} - \frac{q\,(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + [z+h]\,\vec{u}_z)}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(x^2 + y^2 + [z+h]^2)^{3/2}}\,. \tag{IV.15}$$

Faisons tendre z vers 0. On obtient

$$\vec{E}_{q,K}(z = 0^+) = \frac{-2\,q\,h\,\vec{u}_z}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}\,. \tag{IV.16}$$

Or $\vec{E}_{q,K}(z = 0^+) = \sigma/\varepsilon_0\,\vec{u}_z$, donc

$$\sigma = \frac{-2\,q\,h}{4\,\pi\,(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}\,. \tag{IV.17}$$

On peut vérifier que la charge totale induite à la surface $z = 0$ du conducteur par la charge q vaut

$$\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -q. \tag{IV.18}$$

La méthode des images peut s'appliquer à des géométries plus complexes (conducteur sphérique, par exemple), mais la charge image n'est alors plus symétrique de la charge source par rapport à la surface du conducteur.

8. Théorème de superposition. Coefficients de capacité et d'influence

Notons $[V_i] = (V_1, \ldots, V_n)^{\mathsf{T}}$ ※8 (resp. $[Q_i] = (Q_1, \ldots, Q_n)^{\mathsf{T}}$) un état d'équilibre d'un système de n conducteurs, où V_i (resp. Q_i) est le potentiel (resp. la charge totale) du conducteur K_i. La région $\mathcal{D}$ séparant les conducteurs est supposée vide de charges. Supposons les conducteurs fixes ※9 et rigides, et considérons deux états d'équilibre $[V_i']$ et $[V_i'']$ du système. Montrons que la combinaison linéaire (la « superposition ») $[V_i] = \alpha'\,[V_i'] + \alpha''\,[V_i'']$ des états est un état d'équilibre.

Pour tout point M de $\mathcal{D}$, le potentiel $V(M) = \alpha'\,V'(M) + \alpha''\,V''(M)$ vérifie l'équation de Laplace puisque $V'(M)$ et $V''(M)$ la vérifient et que l'équation de Laplace est linéaire. Par ailleurs, $V(M)$ satisfait la condition

8. $(x_1, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}}$ désigne la transposée du vecteur-ligne $(x_1, \ldots, x_n)$, c.-à-d. le vecteur-colonne associé.
9. Si les conducteurs ne sont pas fixes, une modification du potentiel de l'un d'entre eux change la force qu'il exerce sur les autres et par conséquent leurs positions.

aux limites $V(M) = V_i$ sur chaque conducteur. D'après le théorème d'unicité, $[V_i]$ est donc un état d'équilibre du système.

On a $\sigma_i(P) = \varepsilon_0\, \vec{E}_i^{\text{ext}}(P) \cdot \vec{n}_i^{\text{ext}}(P)$, où P est un point de la surface $\mathcal{S}_i$ de K_i, $\vec{E}_i^{\text{ext}}$ est le champ au voisinage extérieur de ce point et $\vec{n}_i^{\text{ext}}(P)$ est un vecteur unitaire, normal à la surface de K_i en P et dirigé vers l'extérieur ; par ailleurs, $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(M)$ et $Q_i = \iint_{P \in \mathcal{S}_i} \sigma_i(P)\, \text{đ}S$. Ces trois relations sont linéaires, donc $\vec{E}(M) = \alpha'\, \vec{E}'(M) + \alpha''\, \vec{E}''(M)$, $\sigma_i(P) = \alpha'\, \sigma_i'(P) + \alpha''\, \sigma_i''(P)$ et $Q_i = \alpha'\, Q_i' + \alpha''\, Q_i''$. L'expression de $[Q_i]$ en fonction de $[V_j]$ est donc linéaire : pour tout i,

$$\boldsymbol{Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{i,\,j}\, V_j} \qquad \textbf{(théorème de superposition)}, \tag{IV.19}$$

ou, sous forme matricielle,

$$[Q_i] = [C_{i,\,j}]\,[V_j]. \tag{IV.20}$$

Les coefficients $C_{i,\,j}$ sont des constantes appelées ***coefficients de capacité*** si $i = j$ et ***coefficients d'influence*** si $i \neq j$; leur unité est le ***farad*** (symbole « F »). **Ils ne dépendent que de la géométrie du système** (c.-à-d. la taille et la forme des conducteurs, la distance entre ceux-ci, leur disposition les uns par rapport aux autres).

La matrice $[C_{i,\,j}]$ possède les propriétés suivantes :

1. **Elle est inversible** ;
2. Elle est symétrique, c.-à-d. $\boldsymbol{C_{i,\,j} = C_{j,\,i}}$ pour tout couple (i, j) ;
3. Pour tout i, $\boldsymbol{C_{i,\,i} \geqslant 0}$;
4. Pour tout i et tout j, $\boldsymbol{C_{i,\,j} \leqslant 0}$ **si** $\boldsymbol{i \neq j}$;
5. Pour tout i, $\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} C_{i,\,j} \geqslant 0}$.

Démonstrations (hors programme)

1. Au lieu de raisonner sur deux états d'équilibre du potentiel, on aurait pu raisonner sur deux états d'équilibre des charges totales, $[Q_i']$ et $[Q_i'']$. Le potentiel $V(M) = \alpha'\, V'(M) + \alpha''\, V''(M)$ vérifiant l'équation de Laplace et les conditions aux limites $Q_i = \alpha'\, Q_i' + \alpha''\, Q_i''$, il s'agit de l'unique solution. Sur chaque conducteur, on obtient $V_i = \alpha'\, V_i' + \alpha''\, V_i''$, donc les V_i s'expriment linéairement en fonction des Q_j : la matrice $[C_{i,\,j}]$ est inversible.
2. Pour prouver la symétrie, montrons d'abord que si $([V_i], [Q_i])$ et $([V_i'], [Q_i'])$ sont deux états d'équilibre, alors
$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\, V_i' = \sum_{i=1}^{n} Q_i'\, V_i. \tag{IV.21}$$
En effet, pour tout point P_i d'un conducteur,
$$V_i = V(P_i) = \sum_{j=1}^{n} \iint_{P_j \in \mathcal{S}_j} \frac{\sigma_j(P_j)}{4\,\pi\,\varepsilon_0\, P_jP_i}\, \text{đ}S_j. \tag{IV.22}$$
Par ailleurs, $Q_i = \iint_{P_i \in \mathcal{S}_i} \sigma_i(P_i)\, \text{đ}S_i$, donc
$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\, V_i' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \iint_{P_i \in \mathcal{S}_i} \iint_{P_j \in \mathcal{S}_j} \frac{\sigma_i(P_i)\, \sigma_j'(P_j)}{4\,\pi\,\varepsilon_0\, P_jP_i}\, \text{đ}S_i\, \text{đ}S_j. \tag{IV.23}$$
L'expression étant symétrique en σ_i et σ_j', $\sum_{i=1}^{n} Q_i\, V_i' = \sum_{i=1}^{n} Q_i'\, V_i$.
Appliquons l'identité (IV.21) à deux états d'équilibre : l'un où $V_i = V_0 \neq 0$ et $V_k = 0$ pour tout $k \neq i$; l'autre où $V_j' = V_0$ et $V_k' = 0$ pour tout $k \neq j$. On obtient $Q_k = C_{k,\,i}\, V_0$ et $Q_k' = C_{k,\,j}\, V_0$, puis $\sum_{k=1}^{n} Q_k\, V_k' = C_{j,\,i}\, V_0^2$ et $\sum_{k=1}^{n} Q_k'\, V_k = C_{i,\,j}\, V_0^2$. L'équation (IV.21) permet de conclure que $C_{i,\,j} = C_{j,\,i}$.
3. Rappelons d'abord qu'une ligne de champ ne peut relier un point d'un conducteur à un autre point du même conducteur (propriété 2, § IV.B.1). On en déduit que **les lignes de champ issues d'un conducteur de potentiel V_i mènent soit à un conducteur de potentiel plus faible, soit à l'infini si $V_i > 0$, soit proviennent d'un conducteur de potentiel plus élevé, soit de l'infini si $V_i < 0$.**
Mettons tous les conducteurs au potentiel 0, sauf K_i qui est mis à un potentiel $V_i > 0$. On obtient $Q_i = C_{i,\,i}\, V_i$. Les lignes de champ reliées à K_i partent nécessairement de la surface, donc $\vec{E}^{\text{ext}}$ est dirigé vers l'extérieur au voisinage extérieur de tout point P de la surface de K_i. On a donc $\sigma_i(P) > 0$ et, par intégration, $Q_i > 0$. Le coefficient $C_{i,i}$, indépendant de $[V_j]$ et $[Q_j]$, est donc strictement positif.
4. Toujours dans cette configuration, intéressons-nous à un conducteur K_j avec $j \neq i$. Toutes les lignes de champ arrivant à K_j viennent de K_i et aucune ligne de champ ne va de K_j à un des autres conducteurs ou à l'infini. On a donc $Q_j \leqslant 0$. Comme $Q_j = \sum_{k=1}^{n} C_{j,k}\, V_k = C_{j,i}\, V_i$, puisque $V_k = 0$ pour tout $k \neq i$, et que $V_i > 0$, on a $C_{j,i} \leqslant 0$.

5. Mettons ensuite tous les conducteurs au même potentiel $V_i > 0$. Toutes les lignes de champ reliées à un conducteur mènent donc à l'infini. Pour la même raison que précédemment, on doit avoir $Q_i > 0$. Or $Q_i = V_i \sum_{j=1}^{n} C_{i,j}$, donc $\sum_{j=1}^{n} C_{i,j} \geqslant 0$.

9. Énergie d'un système de conducteurs

Les charges nettes d'un système de conducteurs étant toutes en surface, l'énergie électrostatique interne au système vaut

$$\mathcal{E}_\mathrm{p} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \iint_{P \in \mathcal{S}_i} \sigma_i(P)\, V_i(P)\, \mathrm{d}S. \tag{IV.24}$$

Le potentiel ayant la même valeur en tout point d'un conducteur,

$$\mathcal{E}_\mathrm{p} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} V_i \iint_{P \in \mathcal{S}_i} \sigma_i(P)\, \mathrm{d}S = \boldsymbol{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i\, V_i}. \tag{IV.25}$$

C. Condensateurs

1. Capacité

Un *condensateur* est un ensemble de deux conducteurs en influence totale (ou quasi totale). (On suppose que tous les autres conducteurs sont suffisamment loin pour que leur influence soit négligeable.) Ces deux conducteurs sont appelés des ***armatures***. On a

$$Q_1 = C_{1,1}\, V_1 + C_{1,2}\, V_2, \tag{IV.26}$$

$$Q_2 = C_{2,1}\, V_1 + C_{2,2}\, V_2. \tag{IV.27}$$

L'influence étant totale, $Q_2 = -Q_1$. Les deux égalités ci-dessus devant être simultanément vérifiées pour tout couple de valeurs (V_1, V_2), on a $C_{1,1} = -C_{2,1}$ et $C_{1,2} = -C_{2,2}$. Comme on a en outre $C_{1,2} = C_{2,1}$,

$$\boldsymbol{C_{1,1} = -C_{2,1} = -C_{1,2} = C_{2,2} =: C}. \tag{IV.28}$$

Cette valeur commune C s'appelle la ***capacité*** du condensateur. *Elle ne dépend que de la géométrie du système*, pas de la charge Q_1, ni de la différence de potentiel, ou ***tension***, $V_1 - V_2$. On a donc

$$\boldsymbol{Q_1 = C\,(V_1 - V_2)}. \tag{IV.29}$$

2. Condensateur plan. Effets de bord. Permittivité d'un isolant

Considérons deux plans infinis parallèles distants de e : le premier, en $x = 0$, portant une densité surfacique de charge σ ; le second, en $x = e$, portant une densité surfacique de charge $-\sigma$. Le champ électrique $\vec{E}_1$ créé par le premier vaut $-\sigma/(2\,\varepsilon_0)\,\vec{u}_x$ pour $x < 0$ et $\sigma/(2\,\varepsilon_0)\,\vec{u}_x$ pour $x > 0$ (cf. éq. (II.62)). Le champ $\vec{E}_2$ créé par le second vaut $-\sigma/(2\,\varepsilon_0)\,(-\vec{u}_x)$ pour $x < e$ et $-\sigma/(2\,\varepsilon_0)\,\vec{u}_x$ pour $x > e$. Le champ total $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ vaut $\sigma/\varepsilon_0\,\vec{u}_x$ entre $x = 0$ et $x = e$, et $\vec{0}$ ailleurs.

Soient deux surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ d'aire S en vis-à-vis sur les plans $x = 0$ et $x = e$. Le champ étant perpendiculaire aux plans, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont en influence totale et constituent un condensateur plan. Les surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ portent les charges $Q_1 = \sigma\, S$ et $Q_2 = -\sigma\, S = -Q_1$. La différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre ces deux plans vaut

$$V_1 - V_2 = \int_{x=e}^{0} \mathrm{d}V = \int_{x=0}^{e} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{x=0}^{e} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\, \mathrm{d}x = \frac{\sigma\, e}{\varepsilon_0}, \tag{IV.30}$$

donc

$$Q_1 = \frac{\varepsilon_0\,(V_1 - V_2)}{e}\, S = C\,(V_1 - V_2) \tag{IV.31}$$

avec

$$\boldsymbol{C = \frac{\varepsilon_0\, S}{e}}. \tag{IV.32}$$

Dans un condensateur plan réel, les plans ne sont évidemment pas infinis. Si la distance e entre les armatures est négligeable devant les dimensions de celles-ci, le modèle constitue néanmoins une excellente approximation du dispositif réel : sauf sur les bords des armatures, la densité surfacique de charge a une valeur σ uniforme sur la première armature et $-\sigma$ sur la seconde ; le champ vaut $\vec{E} \approx \sigma/\varepsilon_0\,\vec{u}_x$ entre les armatures et $\vec{E} \approx \vec{0}$ partout ailleurs, sauf dans la zone entre les bords des armatures, où les lignes de champ sont incurvées vers l'extérieur. On parle d'***effets de bord***.

L'expression $C \approx \varepsilon_0\, S/e$ est plus généralement valable pour tout condensateur, quelle que soit sa forme (p. ex. sphérique ou cylindrique), dès lors que ses armatures sont séparées par du vide et que la distance e entre les armatures est constante et négligeable devant les dimensions de celles-ci ($\sim\sqrt{S}$, typiquement).

L'intérêt d'un condensateur est de « condenser » la charge, c.-à-d. de créer une forte concentration de charge pour une faible différence de potentiel. Plus la capacité est grande, plus le condensateur est efficace. Pour augmenter C, on peut augmenter S ou diminuer e. On peut aussi remplacer le vide (ou plutôt l'air) séparant les armatures par un autre isolant ※10. La capacité devient alors $\boldsymbol{C = \varepsilon\, S/e}$, où ε ※11 est la ***permittivité de l'isolant***. Dans certains isolants, $\varepsilon \gg \varepsilon_0$. Un isolant solide permet aussi de rapprocher les armatures (donc de diminuer e) sans qu'elles se collent. Une dernière raison de prendre un isolant autre que l'air est d'augmenter la valeur du champ disruptif et, ainsi, la tension de claquage.

3. Énergie d'un condensateur

L'énergie d'un condensateur vaut

$$\boldsymbol{\mathcal{E}_\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\,(Q_1\,V_1 + Q_2\,V_2) = \frac{1}{2}\,Q_1\,(V_1 - V_2) \boldsymbol{= \frac{1}{2}\,C\,(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{Q_1^2}{C}}. \tag{IV.33}$$

On peut retrouver ce résultat en intégrant la densité d'énergie, $\varepsilon\,E^2/2$. Dans l'espace entre les armatures, $\vec{E} = \sigma/\varepsilon\,\vec{u}_x$. Hors de cet espace, $\vec{E} = \vec{0}$. On a donc

$$\mathcal{E}_\mathrm{p} = \iiint_\mathrm{entre} \varepsilon\,\frac{(\sigma/\varepsilon)^2}{2}\,\mathrm{đ}\tau + \iiint_\mathrm{hors} \varepsilon_0\,\frac{0^2}{2}\,\mathrm{đ}\tau = \frac{\sigma^2\,S\,e}{2\,\varepsilon} = \frac{Q_1^2}{2\,C}\,. \tag{IV.34}$$

4. Association de deux condensateurs

a. Condensateurs en série

Soient deux condensateurs initialement non chargés, de capacités C_1 et C_2, et d'armatures respectives (A_1, B_1) et (A_2, B_2). Connectons les armatures B_1 et A_2 et soumettons les deux condensateurs en série à une tension $U = V_{A_1} - V_{B_2}$: les armatures A_1 et B_1 portent désormais des charges Q et $-Q$; les armatures A_2 et B_2 également puisque la portion B_1A_2 forme un conducteur isolé et que les condensateurs sont initialement non chargés. Comme les armatures B_1 et A_2 sont reliées, $V_{B_1} = V_{A_2}$, donc

$$U = (V_{A_1} - V_{B_1}) + (V_{A_2} - V_{B_2}) = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}\,, \tag{IV.35}$$

donc, avec

$$\boldsymbol{\frac{1}{C_\mathrm{s}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}, \tag{IV.36}$$

on obtient $Q = C_\mathrm{s}\,U$: l'ensemble des deux condensateurs en série est équivalent à un unique condensateur de capacité C_s.

b. Condensateurs en parallèle

Mettons maintenant les condensateurs, initialement non chargés, en parallèle (on dit aussi « en dérivation ») en connectant d'une part les armatures A_1 et A_2 en A, d'autre part B_1 et B_2 en B. Soumettons A et B à une tension $U = V_A - V_B$: La charge du côté de A est désormais $Q = Q_1 + Q_2 = C_1\,(V_{A_1} - V_{B_1}) + C_2\,(V_{A_2} - V_{B_2})$; celle du côté de B est $-Q$. Comme $V_{A_1} = V_{A_2} = V_A$ et que $V_{B_1} = V_{B_2} = V_B$, l'ensemble des deux condensateurs en parallèle est équivalent à un unique condensateur de capacité

$$\boldsymbol{C_\mathrm{p} = C_1 + C_2}. \tag{IV.37}$$

10. Les isolants sont aussi appelés des ***diélectriques***. Leur étude détaillée relève de l'électromagnétisme des milieux continus et sort du cadre du présent cours.
11. Le rapport $\varepsilon_\mathrm{r} = \varepsilon/\varepsilon_0$ s'appelle la ***permittivité relative*** de l'isolant. Pour l'air, ε_r est très légèrement supérieure à 1. La différence entre ε et ε_0 est due à la polarisation du milieu diélectrique quand celui-ci est soumis à un champ électrique. Des charges *liées* apparaissent alors à la surface de l'isolant, mais la capacité ne relie la tension qu'aux charges, *libres*, portées par les armatures conductrices.