

Chapitre II

THÉORÈME DE GAUSS. FORMULATION LOCALE DE L'ÉLECTROSTATIQUE

A. Angles solides

1. Rappel sur les angles plans

L'angle solide étant une généralisation à l'espace de la notion d'angle plan, revenons d'abord sur cette dernière notion. Considérons une courbe plane orientée \mathcal{C} et deux points de \mathcal{C} infiniment proches, M et M' , tels que l'arc $\overline{MM'}$ soit orienté dans le sens de \mathcal{C} ; posons $\vec{d\ell} = \overline{MM'}$ et $d\ell = \|\vec{d\ell}\|$. Notons O un point du plan de la courbe, \vec{u}_z un vecteur unitaire normal à ce plan, et \vec{u}_x et \vec{u}_y deux vecteurs tels que la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ soit orthonormée directe. Le segment orienté $\vec{d\ell}$ est vu depuis O sous un angle plan orienté $d\alpha$ (le sens trigonométrique est défini par rapport à \vec{u}_z). La valeur absolue de $d\alpha$ est une mesure de la quantité de plan, vue depuis O , obstruée par $d\ell$ (en supposant la courbe opaque).

Pour calculer $d\alpha$, utilisons les coordonnées cylindriques ρ et ϕ de M (avec $\phi \in [0, 2\pi[$), définies à partir de $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Introduisons également le vecteur tangent \vec{t} et le vecteur normal \vec{n} à la courbe en M ; \vec{t} est dans le sens de \mathcal{C} et \vec{n} est choisi de telle sorte que $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{u}_z)$ soit une base orthonormée directe. On a $d\ell \cos \beta = \rho d\alpha$, où $\beta := \angle(\vec{t}, \vec{u}_\phi) = \angle(\vec{n}, \vec{u}_\rho)$. Comme $\vec{u}_\rho \cdot \vec{n} = \cos \beta$, on obtient

$$d\alpha = \frac{d\ell \vec{n} \cdot \vec{u}_\rho}{\rho} \quad (\text{en radians}). \quad (\text{II.1})$$

Posons $\phi' := \angle(\vec{u}_x, \overline{O'M})$ (dans $[0, 2\pi[$). En général, $d\alpha = \phi' - \phi$, mais si l'arc $\overline{MM'}$ coupe la demi-droite Ox_+ , alors $d\alpha = \phi' - \phi + 2\pi$ si $\phi > \phi'$ et $d\alpha = \phi' - \phi - 2\pi$ si $\phi < \phi'$.

Considérons deux demi-droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 issues de O et faisant des angles ϕ_1 et ϕ_2 (dans $[0, 2\pi[$) avec \vec{u}_x . Quels que soient le point initial sur \mathcal{D}_1 et le point final sur \mathcal{D}_2 , et quelle que soit la courbe \mathcal{C} continue reliant ces points, \mathcal{C} est vue depuis O sous un angle

$$\alpha := \int_{\mathcal{C}} d\alpha = \phi_2 - \phi_1 + 2(k^+ - k^-)\pi, \quad (\text{II.2})$$

où k^+ (resp. k^-) est le nombre de fois où \mathcal{C} croise la demi-droite Ox_+ dans le sens trigonométrique (resp. horaire)^{*1}.

En particulier, si la courbe est fermée et fait un unique tour complet autour de O dans le sens trigonométrique, alors $\alpha = 2\pi$. Si elle est fermée mais n'enlace pas O , $\alpha = 0$. Remarquez que, comme l'illustre ce dernier cas, $|\alpha|$ n'est pas l'angle obstrué par une courbe finie lorsqu'une portion de cette courbe fait écran (depuis O) à une autre.

2. Définition et propriétés des angles solides

Adaptons ce qui précède au cas d'une surface \mathcal{S} dans l'espace. En chaque point de cette surface, il existe deux vecteurs unitaires normaux à la surface et opposés. Complétons \mathcal{S} par une surface \mathcal{S}' de telle sorte que $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$ soit fermée et choisissons en tout point $M \in \mathcal{S}$ le vecteur unitaire \vec{n} dirigé vers l'extérieur de $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$.

1. α est un « angle déroulé » (ou « déplié »), variant continûment le long de la courbe, alors que ϕ est un « angle enroulé » (ou « replié »), qui, étant défini modulo 2π , subit une discontinuité de $\pm 2\pi$ à chaque fois que la courbe coupe la demi-droite Ox_+ .

Le choix de S' étant arbitraire, la direction de \vec{n} l'est aussi mais cette procédure assure que le sens de \vec{n} est cohérent en tout point. (Une autre façon de faire, équivalente, est de choisir \vec{n} arbitrairement en un certain point $M \in S$ parmi les deux possibilités et de prendre \vec{n} en tout autre point $M' \in S$ de telle sorte que $\vec{n}(M)$ et $\vec{n}(M')$ pointent du même côté de la surface S .)

Un élément de surface dS de S est vu depuis O sous un angle solide

$$d\Omega := \frac{dS \vec{n} \cdot \vec{u}_r}{r^2}. \quad (\text{II.3})$$

Cette quantité est en **stéradians** (symbole «sr», unité sans dimension). La valeur absolue de $d\Omega$ est une mesure de la quantité d'espace, vue depuis O , obstruée par dS (en supposant la surface opaque).

L'angle solide sous lequel S est vue depuis O est

$$\Omega := \iint_S d\Omega. \quad (\text{II.4})$$

(Remarquer que $|\Omega|$ ne mesure la quantité d'espace obstruée par S , vue depuis O , que si aucune partie de S ne fait écran à une autre.)

Considérons un demi-cône \mathcal{K} de sommet O (au sens mathématique, c.-à-d. l'ensemble des demi-droites issues de O s'appuyant sur un contour fermé; il ne s'agit pas forcément d'un demi-cône de révolution). Pour toute surface S s'appuyant sur \mathcal{K} et ayant la même orientation, Ω a la même valeur.

Si dS est un élément de sphère de centre O et de rayon r compris dans $[\theta, \theta + d\theta] \times [\phi, \phi + d\phi]$,

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{II.5})$$

et $\vec{n} = \pm \vec{u}_r$, donc en choisissant $\vec{n} = +\vec{u}_r$, on obtient

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi. \quad (\text{II.6})$$

Une calotte sphérique d'axe (O, \vec{u}_z) et de demi-angle θ_0 est vue depuis O sous un angle solide

$$\Omega_{\text{calotte}}(\theta_0) = \int_{\theta=0}^{\theta_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\Omega = 2\pi (1 - \cos \theta_0). \quad (\text{II.7})$$

Avec $\theta_0 = \pi$, on obtient le résultat pour la sphère entière^{*2} :

$$\Omega_{\text{sphère}} = 4\pi. \quad (\text{II.8})$$

De même, pour toute surface fermée contenant O et ne se coupant pas, $\Omega = 4\pi$.

Pour une surface fermée ne contenant pas O , en revanche, $\Omega = 0$.

B. Forme intégrale du théorème de Gauss

1. Flux. Énoncé du théorème de Gauss

Le flux d'un champ vectoriel \vec{f} à travers une surface S orientée est la quantité

$$\Phi := \iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}, \quad (\text{II.9})$$

où $d\vec{S} := dS \vec{n}$ ^{*3}. C'est une mesure de la «quantité» de lignes de champ \vec{f} traversant S .

Le flux élémentaire du champ électrostatique \vec{E}_i produit par une charge Q_i placée en P_i à travers une surface dS située à une distance r de P_i vaut

$$d\Phi_i = \vec{E}_i \cdot dS \vec{n} = \frac{Q_i}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot dS \vec{n} = \frac{Q_i}{4\pi \epsilon_0} d\Omega_i, \quad (\text{II.10})$$

où $d\Omega_i$ est l'angle solide sous lequel dS est vue depuis P_i . Le flux total du champ produit par Q_i à travers S est donc

$$\Phi_i = \frac{Q_i}{4\pi \epsilon_0} \Omega_i, \quad (\text{II.11})$$

où Ω_i est l'angle solide sous lequel S est vue depuis P_i . Pour une surface S fermée, on a donc

$$\Phi_i = \begin{cases} Q_i/\epsilon_0 & \text{si } Q_i \text{ est à l'intérieur de } S, \\ 0 & \text{si } Q_i \text{ est à l'extérieur de } S. \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

2. La sphère étant une surface fermée, on doit prendre \vec{n} vers l'extérieur, soit $\vec{n} = +\vec{u}_r$.

3. Attention, $d\vec{S}$ n'est pas une variation infinitésimale d'un vecteur \vec{S} , mais une quantité vectorielle infinitésimale.

Le flux à travers une surface fermée du champ électrique engendré par un ensemble de charges Q_1, \dots, Q_n est donc

$$\Phi_{\text{tot}} = \sum_i \Phi_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i: Q_i \in \mathcal{V}} Q_i, \quad (\text{II.13})$$

où \mathcal{V} est le volume à l'intérieur de \mathcal{S} . On obtient ainsi la **forme intégrale du théorème de Gauss**^{*4} :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}, \quad (\text{II.14})$$

où Q_{int} est la charge à l'intérieur de la surface fermée \mathcal{S} .

2. Application : distribution à symétrie sphérique

Si la distribution de charges est suffisamment symétrique, la forme intégrale du théorème de Gauss permet de calculer aisément et directement (sans passer par le potentiel) le champ électrique. Une fois connues la direction de \vec{E} et les variables dont il dépend, on peut définir une surface fermée sur laquelle appliquer le théorème. Cette « surface de Gauss », en général fictive, ne sert que d'intermédiaire de calcul. Elle doit passer par le point M où l'on veut déterminer le champ. L'expression du flux mêlant les valeurs de \vec{E} en tous les points de la surface, le choix de celle-ci doit exploiter les symétries et invariances du champ pour qu'on puisse en extraire $\vec{E}(M)$.

Considérons une densité volumique de charge ρ ne dépendant que de la distance r à un point O . Une telle distribution est à symétrie sphérique :

- elle est symétrique par rapport à tout plan contenant O , donc, en n'importe quel point M de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , $\vec{E}(M)$ appartient à tous les plans contenant O et M , et, par conséquent, à leur intersection, la droite OM : $\vec{E} = E_r(r, \theta, \phi) \vec{u}_r$;
- ρ est invariante par rotation autour de (O, \vec{u}_z) ^{*5}, donc \vec{E} aussi. Or ϕ est la seule coordonnée sphérique qui varie lors d'une telle transformation, donc E_r ne dépend pas de ϕ ;
- ρ est invariante par rotation autour de (O, \vec{u}_ϕ) , donc \vec{E} aussi. Or θ est la seule coordonnée sphérique qui varie lors d'une telle transformation, donc E_r ne dépend pas de θ .

On a ainsi $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$.

Appliquons maintenant le théorème de Gauss à la sphère \mathcal{S} de centre O et de rayon $r = r(M)$. Cette surface est fermée et contient M . En un point P de \mathcal{S} , on a $d\vec{S} = dS \vec{u}_r(P)$, donc

$$\oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S} = \oiint_{P \in \mathcal{S}} E_r(P) \vec{u}_r(P) \cdot dS \vec{u}_r(P) = E_r(r) \oiint_{P \in \mathcal{S}} dS, \quad (\text{II.15})$$

car $\vec{u}_r(P) \cdot \vec{u}_r(P) = 1$ et $E_r(P) = E_r(M)$ puisque $r(P) = r(M)$. On a donc

$$\oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S} = E_r(r) \times 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0}, \quad (\text{II.16})$$

où $Q_{\text{int}}(r)$ est la charge à l'intérieur de la sphère de Gauss, d'où

$$\vec{E} = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r. \quad (\text{II.17})$$

On a retrouvé, dans le cas plus général d'une distribution de charges à symétrie sphérique, le résultat déjà obtenu pour une sphère et une boule uniformément chargées en surface ou en volume.

c. Forme locale des équations de l'électrostatique

1. Forme locale du théorème de Gauss

Sans prétention de rigueur, esquissons d'abord une démonstration du théorème d'Ostrogradski/Green.

Considérons d'abord un pavé droit (c.-à-d. un parallélépipède rectangle) infinitésimal $[x, x + dx] \times [y, y + dy] \times [z, z + dz]$ et calculons le flux d'une fonction vectorielle \vec{f} à travers la surface de celui-ci. En orientant

4. En allemand, écrit « Gauß » et prononcé [gaus].

5. Plus directement, on peut dire que ρ est invariante par rotation autour de O , donc que E_r ne dépend pas de l'angle d'une telle rotation, quel que soit son axe. En particulier, E_r ne dépend ni de ϕ ni de θ .

les six faces vers l'extérieur, on a

$$\begin{aligned} \mathring{d}\Phi &\approx \vec{f}(x, y, z) \cdot dy dz (-\vec{u}_x) + \vec{f}(x + dx, y, z) \cdot dy dz (+\vec{u}_x) && \text{(faces en } x \text{ et } x + dx) \\ &+ \vec{f}(x, y, z) \cdot dx dz (-\vec{u}_y) + \vec{f}(x, y + dy, z) \cdot dx dz (+\vec{u}_y) && \text{(faces en } y \text{ et } y + dy) \\ &+ \vec{f}(x, y, z) \cdot dx dy (-\vec{u}_z) + \vec{f}(x, y, z + dz) \cdot dx dy (+\vec{u}_z) && \text{(faces en } z \text{ et } z + dz) \\ &= (f_x[x + dx, y, z] - f_x[x, y, z]) dy dz + (f_y[x, y + dy, z] - f_y[x, y, z]) dx dz \\ &+ (f_z[x, y, z + dz] - f_z[x, y, z]) dx dy. \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Or $f_x(x + dx, y, z) - f_x(x, y, z) \approx (\partial f_x / \partial x) dx$, et de même pour les variations de f_y et f_z entre y et $y + dy$ et entre z et $z + dz$, donc

$$\mathring{d}\Phi \approx \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \text{div } \vec{f} \mathring{d}\tau, \quad (\text{II.19})$$

où $\mathring{d}\tau = dx dy dz$ est le volume du pavé et

$$\text{div } \vec{f} := \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \quad (\text{II.20})$$

est la **divergence** de \vec{f} .

Pour une surface \mathcal{S} fermée dont le volume intérieur est divisible en pavés droits infinitésimaux par un maillage orthogonal, le flux à travers \mathcal{S} est égal à la somme des flux $\mathring{d}\Phi$ à travers chacun des pavés, car les flux à travers les surfaces des pavés situées à l'intérieur de \mathcal{S} se compensent (considérer la surface commune à deux pavés mitoyens) : il ne reste donc que la somme des flux à travers celles des surfaces des pavés qui recouvrent \mathcal{S} .

Bien qu'une surface fermée quelconque ne coïncide pas, sauf exception, avec des surfaces de pavés droits, même infinitésimaux, admettons que le résultat soit généralisable. Pour toute fonction vectorielle \vec{f} , on a donc

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \mathring{d}\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{f} \mathring{d}\tau \quad \text{(théorème d'Ostrogradski/Green),} \quad (\text{II.21})$$

où \mathcal{V} est le volume délimité par \mathcal{S} .

Appliquons ceci au théorème de Gauss. On a

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \mathring{d}\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{E} \mathring{d}\tau = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\epsilon_0} \mathring{d}\tau. \quad (\text{II.22})$$

Ceci étant vrai pour toute surface fermée, on en déduit la **forme locale du théorème de Gauss** :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (\text{II.23})$$

“Fonction” δ (hors programme)

Bien que formulée en terme de densité volumique de charge, l'expression (II.23) s'applique aussi à une distribution discrète de charges Q_1, \dots, Q_n . Notons $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ les vecteurs positions de celles-ci. L'expression de $\rho(\vec{r})$ est alors

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i Q_i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (\text{II.24})$$

où

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i) := \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \delta(z - z_i) \quad (\text{II.25})$$

et δ est la **“fonction” de Dirac** (on dit parfois aussi un « pic de Dirac », voire un « Dirac » tout court). Celle-ci possède les propriétés suivantes :

- $\delta(0)$ “=” ∞ ;
- $\delta(x)$ “=” 0 si $x \neq 0$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$.

On a donc bien

- $\rho(\vec{r}) = 0$ si, pour tout i , $\vec{r} \neq \vec{r}_i$;
- $\rho(\vec{r}_i) = \text{sgn}(Q_i) \times \infty$;
- $\iiint_{\mathcal{V}} Q_i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i) \mathring{d}\tau = Q_i$.

La notation « $\delta(x) = \dots$ » utilisée dans les deux premières “propriétés” est abusive car δ n'est en fait pas une fonction (la valeur $\delta(x)$ n'est pas définie), mais une **distribution**, c.-à-d. un objet mathématique généralisant la notion de fonction. Plus précisément, δ est l'objet tel que, pour toute fonction φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} indéfiniment

dérivable et nulle hors d'un intervalle borné de \mathbb{R} ,

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x) dx = \varphi(0). \quad (\text{II.26})$$

Or, pour toute suite de réels strictement positifs $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 quand $j \rightarrow \infty$ et pour toute suite de fonctions $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ , nulles hors de $[-\alpha_j, \alpha_j]$ et telles que $\int_{x=-\infty}^{\infty} f_j(x) dx = \int_{x=-\alpha_j}^{\alpha_j} f_j(x) dx = 1$ (donc de plus en plus piquées vers 0), on a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_j(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{x=-\alpha_j}^{\alpha_j} \varphi(x) f_j(x) dx = \varphi(0). \quad (\text{II.27})$$

Bien que $\lim_{j \rightarrow 0} f_j$ ne soit pas définie, au sens de la convergence ponctuelle de fonctions, puisque $\lim_{j \rightarrow 0} f_j(0) = \infty$, les expressions (II.26) et (II.27) permettent de considérer δ comme la limite de la suite de fonctions $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ au sens des distributions.

2. Rotationnel de \vec{E} . Théorème de Helmholtz

Remarquer que la forme locale ne suffit pas pour déterminer \vec{E} à partir de ρ , car on peut rajouter à \vec{E} n'importe quelle fonction \vec{f} de divergence nulle (par exemple $\vec{f} = x \vec{u}_x - y \vec{u}_y$) et obtenir une autre solution de (II.23). Des considérations de symétrie peuvent permettre de préciser \vec{E} (cf. § II.B.2), mais, dans le cas général, il faut compléter la forme locale du théorème de Gauss par d'autres contraintes.

Une première contrainte est fournie par l'équation (I.33). Sur tout chemin fermé \mathcal{C} , on a $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$. Or, pour toute fonction vectorielle \vec{f} , **quelle que soit la surface \mathcal{S} s'appuyant sur \mathcal{C}** (c.-à-d. délimitée par \mathcal{C}),

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{f} \cdot d\vec{S} \quad (\text{théorème de Stokes}), \quad (\text{II.28})$$

où $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{f}$ (« curl \vec{f} » en anglais) désigne le **rotationnel** de \vec{f} . Ce vecteur est défini par l'expression suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z. \quad (\text{II.29})$$

La surface \mathcal{S} est évidemment ouverte. Pour appliquer le théorème de Stokes, on doit l'orienter (et, par conséquent, orienter le vecteur $d\vec{S}$ perpendiculaire à \mathcal{S} en tout point) de manière cohérente avec l'orientation de \mathcal{C} . On utilise pour cela la **règle de la main droite** : si l'index est placé tangentiellement à la courbe et qu'il pointe dans le sens adopté pour celle-ci, avec la paume (ou le majeur) vers la surface à l'intérieur de la courbe, alors la surface est orientée en ce point dans le sens indiqué par le pouce. Cette orientation se transfère de proche en proche à tout point de la surface.

De manière plus formelle, si \vec{t} est un vecteur unitaire tangent en un point M à la courbe et est orienté dans le sens de \mathcal{C} , que \vec{t}' est un vecteur unitaire perpendiculaire à \vec{t} , tangent en M à la surface et orienté vers \mathcal{S} , alors $\vec{n} = \vec{t} \times \vec{t}'$ en M .

Appliquons le théorème de Stokes à \vec{E} . Pour toute courbe fermée,

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0, \quad (\text{II.30})$$

donc, en tout point,

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}. \quad (\text{II.31})$$

(Cette relation n'est pas vraie hors du cadre de l'électrostatique.)

Les équations (II.23) et (II.31) ne suffisent toujours pas à déterminer le champ électrostatique de manière unique, car si \vec{E} les satisfait, alors $\vec{E} + \vec{c}^{\text{te}}$ (par exemple) aussi. La dernière contrainte porte sur le comportement asymptotique du champ : \vec{E} doit tendre vers $\vec{0}$ à l'infini.

Théorème de Helmholtz (hors programme)

Si ρ tend vers 0 plus vite que $1/r^2$ (donc en particulier si la distribution de charges est spatialement bornée), il existe une et une seule fonction \vec{E} de la position telle que

- $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$;
- $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$;
- $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{E} = \vec{0}$.

Cette solution est donnée par $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, où

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_P \frac{\rho(P)}{PM} d\tau. \quad (\text{II.32})$$

On peut se demander quel est l'intérêt de remplacer une unique loi, la loi de Coulomb, par une formulation constituée de deux lois locales ($\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ et $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$), d'une condition sur \vec{E} à l'infini et de la relation $\vec{F} = q\vec{E}$. En électrostatique, il est faible. En revanche, la formulation locale s'adapte aisément au cas de charges mobiles (il s'agit alors d'**électrodynamique**), contrairement à la loi de Coulomb (qui n'est vraie que pour des charges statiques, rappelons-le). Par ailleurs, une formulation locale est naturelle pour décrire la propagation de proche en proche, par l'intermédiaire d'un champ, de l'interaction électromagnétique.

3. Équations de Poisson et de Laplace

Pour toute fonction scalaire f , $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \Delta f$, où

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{II.33})$$

est le **laplacien scalaire**. De $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, on déduit l'**équation de Poisson** :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (\text{II.34})$$

Dans une zone où la charge nette est nulle en tout point, l'équation de Poisson se réduit à l'**équation de Laplace** :

$$\Delta V = 0. \quad (\text{II.35})$$

Cette dernière équation apparaît dans différentes branches de la physique. Ses solutions obéissent au **théorème de l'extrémum** : V n'admet pas d'extrémum dans toute zone où $\Delta V = 0$. Un maximum ou un minimum de V ne peut donc être atteint qu'à la surface d'un espace dans lequel $\rho = 0$.

Une conséquence de ce théorème est le **théorème d'unicité** des solutions de l'équation de Poisson : le potentiel V est déterminé de manière unique par la distribution des charges dans un volume \mathcal{V} et par la valeur de V ou celle de $\overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{n}$ ^{*6} en tout point P de la surface \mathcal{S} délimitant ce volume, \vec{n} étant un vecteur normal en P à la surface. Donc, si on trouve, par quelque moyen que ce soit, une solution de l'équation $\Delta V = -\rho/\epsilon_0$ dans \mathcal{V} satisfaisant les conditions sur V à la surface de \mathcal{V} , cette solution est la bonne.

D. Énergie électrostatique

Réexprimons l'énergie potentielle électrostatique interne d'une distribution \mathcal{D} de charges. On a

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \iiint_{P \in \mathcal{V}} \rho(P) V(P) d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathcal{V}} (\text{div } \vec{E}) V d\tau, \quad (\text{II.36})$$

où \mathcal{V} est un volume contenant \mathcal{D} , ρ est la densité volumique de charge propre à \mathcal{D} , et V et \vec{E} sont le potentiel et le champ produits par \mathcal{D} . Or, pour toute fonction vectorielle \vec{f} et toute fonction scalaire g , on a

$$(\text{div } \vec{f}) g = \text{div}(\vec{f} g) - \vec{f} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} g. \quad (\text{II.37})$$

Par ailleurs, d'après le théorème d'Ostrogradski,

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{f} g) d\tau = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} g \cdot d\vec{S}, \quad (\text{II.38})$$

où \mathcal{S} est la surface délimitant le volume \mathcal{V} et $d\vec{S}$ est un élément de surface de \mathcal{S} . On a donc

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{D}) = \frac{\epsilon_0}{2} \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} V \cdot d\vec{S} - \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V d\tau \quad (\text{II.39})$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} V \cdot d\vec{S} + \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathcal{V}} E^2 d\tau \quad (\text{II.40})$$

puisque $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$.

6. Une contrainte sur V en certains points de \mathcal{S} et sur $\overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{n}$ en les autres points de \mathcal{S} suffit à fixer V dans tout \mathcal{V} . Néanmoins, V n'est déterminé qu'à une constante additive près si V n'est connu en aucun point de \mathcal{S} . Remarquer par ailleurs que, au signe près, $\overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{n}$ est la composante du champ électrique normale à la surface.

L'équation (II.36), et par conséquent (II.39) aussi, reste valable pour tout volume \mathcal{V} délimité par une surface S' englobant \mathcal{V} , puisque (pour \mathcal{D}) $\rho = 0$ dans $\mathcal{V}' \setminus \mathcal{V}$. Considérons en particulier une sphère S' de rayon r , dont le centre O est à l'intérieur de la distribution bornée de charges. À grande distance, le champ et le potentiel créés par chaque élément de charge de \mathcal{D} sont respectivement en $\mathcal{O}(1/r^2)^{*7}$ et en $\mathcal{O}(1/r)$. Il en est donc de même du champ et du potentiel total à la surface de la sphère, donc $\vec{E}V = \mathcal{O}(1/r^3)$ sur S . L'aire de la sphère valant $4\pi r^2$,

$$\iint_{S'} \vec{E}V \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{II.41})$$

La sphère de rayon ∞ englobant l'Univers entier (« $\bar{\mathcal{U}}$ »), on a

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{D}) = \iiint_{P \in \bar{\mathcal{U}}} \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(P) d\tau. \quad (\text{II.42})$$

L'énergie potentielle de la distribution, c.-à-d. son **énergie de configuration** (spatiale), $\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \rho V d\tau$, a été réécrite comme une **énergie du champ** dans tout l'univers, $\frac{1}{2} \iiint_{\bar{\mathcal{U}}} \varepsilon_0 E^2 d\tau$. Ce changement de point de vue, facultatif ici, deviendra impératif lorsque le champ ne sera plus stationnaire et qu'il faudra tenir compte de sa propagation.

La quantité $\varepsilon_0 E^2(P)/2$ porte le nom de **densité volumique d'énergie électrostatique** en P . Remarquer que la valeur de $\mathcal{E}_p^{\text{int}}$ donnée par l'expression (II.42) et déduite de l'équation (II.36) est toujours positive, alors que celle d'une distribution discrète, $(1/2) \sum_i q_i V_i$ (équation (I.89)), peut être négative. Ceci vient du fait la première prend en compte l'énergie propre de chaque élément de charge, contrairement à la deuxième.

Considérons deux distributions de charges \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 (pouvant éventuellement occuper le même volume, mais constituées de charges distinctes), caractérisées par les densités volumiques de charge ρ_1 et ρ_2 et produisant les champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 . Le champ produit par $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ est $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$, donc

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\bar{\mathcal{U}}} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 d\tau = \mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{D}_1) + \mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{D}_2) + \mathcal{E}_p(\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2), \quad (\text{II.43})$$

où

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{D}_1) = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{P \in \bar{\mathcal{U}}} E_1^2(P) d\tau \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{D}_2) = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{P \in \bar{\mathcal{U}}} E_2^2(P) d\tau \quad (\text{II.44})$$

sont, respectivement, l'énergie propre de \mathcal{D}_1 et celle de \mathcal{D}_2 , et

$$\mathcal{E}_p(\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2) = \varepsilon_0 \iiint_{P \in \bar{\mathcal{U}}} \vec{E}_1(P) \cdot \vec{E}_2(P) d\tau \quad (\text{II.45})$$

est l'énergie d'interaction entre \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 .

Énergie d'interaction entre deux charges ponctuelles (hors programme)

On sait que l'énergie potentielle d'interaction entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 séparées par une distance D vaut $\mathcal{E}_p = q_1 q_2 / (4\pi \varepsilon_0 D)$ (cf. (I.84)). Montrons qu'on peut retrouver ce résultat à l'aide de l'expression (II.45). Pour faire ce calcul, on place q_1 à l'origine O et q_2 en un point O' sur l'axe Oz en $z = D$. Considérons un point P quelconque, de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . On a $\vec{O}'P = -\vec{OO}' + \vec{OP} = r\vec{u}_r - D\vec{u}_z$, donc

$$O'P = (\vec{O}'P \cdot \vec{O}'P)^{1/2} = (r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta)^{1/2}. \quad (\text{II.46})$$

Par ailleurs,

$$\vec{E}_1(P) = \frac{q_1}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{E}_2(P) = \frac{q_2 \vec{O}'P}{4\pi \varepsilon_0 (O'P)^3} = \frac{q_2 (r\vec{u}_r - D\vec{u}_z)}{4\pi \varepsilon_0 (r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta)^{3/2}}, \quad (\text{II.47})$$

donc

$$\vec{E}_1(P) \cdot \vec{E}_2(P) = \frac{q_1 q_2}{(4\pi \varepsilon_0)^2} \frac{r - D \cos \theta}{r^2 (r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta)^{3/2}}. \quad (\text{II.48})$$

D'après (II.45),

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p &= \frac{q_1 q_2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{r - D \cos \theta}{r^2 (r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta)^{3/2}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{q_1 q_2}{8\pi \varepsilon_0} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{r - D \cos \theta}{(r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta)^{3/2}} \sin \theta dr d\theta. \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

7. Pour le champ, « $\vec{E} = \mathcal{O}(1/r^2)$ quand $r \rightarrow \infty$ » signifie qu'il existe deux réels K et R tels que, pour tout point M , si $r := OM \geq R$, on a $\|\vec{E}(M)\| \leq K/r^2$.

Or

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta}} = -\frac{1}{2} \frac{2r - 2D \cos \theta}{(r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta)^{3/2}}, \quad (\text{II.50})$$

d'où, en permutant les intégrales sur r et sur θ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= \frac{q_1 q_2}{8\pi \varepsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta}} \right) \sin \theta \, dr \, d\theta \\ &= \frac{q_1 q_2}{8\pi \varepsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta}} \right]_{r=0}^{\infty} \sin \theta \, d\theta \\ &= \frac{q_1 q_2}{8\pi \varepsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta}{D} \, d\theta = \frac{q_1 q_2}{8\pi \varepsilon_0 D} [-\cos \theta]_{\theta=0}^{\pi} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 D}. \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

On retrouve bien le résultat attendu.

E. Champ créé par une distribution surfacique

1. Traversée d'une nappe de charges

Considérons une nappe \mathcal{N} chargée, c.-à-d. une distribution surfacique de charges, séparant une zone Z_1 d'une zone Z_2 . Notons σ la densité surfacique de charge en un point M de \mathcal{N} , et $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur normal en M à \mathcal{N} et dirigé de Z_1 vers Z_2 .

Comparons les champs électriques \vec{E}_1 et \vec{E}_2 dans Z_1 et Z_2 au voisinage de M . Pour cela, décomposons chacun de ces champs sous la forme $\vec{E} = \vec{E}^\perp + \vec{E}^\parallel$, où $\vec{E}^\perp := (\vec{E} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}) \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{E}^\parallel := \vec{E} - \vec{E}^\perp$. Posons $E^\perp := \vec{E} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$. La composante \vec{E}^\perp est évidemment normale à \mathcal{N} en M . Par construction, la composante \vec{E}^\parallel est tangentielle (parallèle) à \mathcal{N} . En effet, $\vec{E}^\parallel \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{E} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} - \vec{E}^\perp \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0$ puisque $\vec{E}^\perp \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = E^\perp \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = E^\perp = \vec{E} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$.

a. Composante normale de \vec{E}

Appliquons d'abord le théorème de Gauss à un cylindre de révolution⁸ \mathcal{S} d'axe $(M, \vec{n}_{1 \rightarrow 2})$. Ce cylindre est tronqué dans Z_1 et Z_2 , et fermé dans ces zones, respectivement, par des surfaces \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 perpendiculaires à $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$, chacune d'aire infinitésimale S . Il contient M dans son espace intérieur et est traversé par la nappe à mi-hauteur. Notons h la hauteur du cylindre et \mathcal{S}_3 sa surface latérale (celle parallèle à $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$).

On a $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$, donc

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{\mathcal{S}_3} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}, \quad (\text{II.52})$$

car l'aire de la portion de nappe à l'intérieur du cylindre vaut S .

Faisons tendre h vers 0 (exclu). On a $\lim_{h \rightarrow 0; h > 0} \iint_{\mathcal{S}_3} \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0$, donc

$$\frac{\sigma S}{\varepsilon_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \left(\iint_{\mathcal{S}_1} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{E} \cdot \vec{dS} \right), \quad (\text{II.53})$$

Sur \mathcal{S}_1 , $\vec{dS} = \vec{dS}(-\vec{n}_{1 \rightarrow 2})$, donc

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{E} \cdot \vec{dS} = - \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{dS} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = - \iint_{\mathcal{S}_1} (\vec{E}_1^\perp + \vec{E}_1^\parallel) \cdot \vec{dS} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = -E_1^\perp S, \quad (\text{II.54})$$

De même, sur \mathcal{S}_2 , $\vec{dS} = \vec{dS}(+\vec{n}_{1 \rightarrow 2})$, donc

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{E} \cdot \vec{dS} = +E_2^\perp S. \quad (\text{II.55})$$

En divisant par S , on obtient finalement

$$E_2^\perp - E_1^\perp = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (\text{II.56})$$

8. Au sens mathématique du terme, un cylindre est un ensemble de droites parallèles s'appuyant sur un contour fermé. Il est dit « de révolution » quand ce contour est un cercle et que les droites sont perpendiculaires au plan de ce cercle. Pour la démonstration, on aurait pu prendre, au lieu d'un cylindre de révolution, n'importe quel cylindre parallèle à $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ et contenant M dans son volume intérieur.

b. Composante tangentielle de \vec{E}

Pour établir la relation entre \vec{E}_1^{\parallel} et \vec{E}_2^{\parallel} , considérons un rectangle orienté \mathcal{C} de centre M , dans un plan parallèle à $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$. Les côtés \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de \mathcal{C} sont dans Z_1 et Z_2 , respectivement, perpendiculaires à $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ et chacun de longueur infinitésimale ℓ . Le rectangle est traversé à mi-hauteur par la nappe. Notons \mathcal{C}_3 et \mathcal{C}_4 les côtés restants (parallèles à $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$) de \mathcal{C} , et h leur longueur.

On a $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$, donc

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_3} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_4} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (\text{II.57})$$

Faisons tendre h vers 0 (exclu). On a $\lim_{h \rightarrow 0 | h > 0} \int_{\mathcal{C}_3} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \lim_{h \rightarrow 0 | h > 0} \int_{\mathcal{C}_4} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$, donc

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ | h > 0}} \left(\int_{\mathcal{C}_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \right) = 0. \quad (\text{II.58})$$

Notons \vec{t} le vecteur unitaire normal à $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ orientant \mathcal{C}_1 . On a $d\vec{r} = d\ell \vec{t}$ sur \mathcal{C}_1 et $d\vec{r} = -d\ell \vec{t}$ sur \mathcal{C}_2 . Or

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ | h > 0}} \int_{\mathcal{C}_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \ell \vec{E}_1 \cdot \vec{t} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ | h > 0}} \int_{\mathcal{C}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\ell \vec{E}_2 \cdot \vec{t}, \quad (\text{II.59})$$

donc $\vec{E}_2 \cdot \vec{t} - \vec{E}_1 \cdot \vec{t} = 0$. Ceci étant vrai pour tout \vec{t} perpendiculaire à $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$,

$$\vec{E}_2^{\parallel} - \vec{E}_1^{\parallel} = \vec{0}. \quad (\text{II.60})$$

2. Expression synthétique

En combinant (II.56) et (II.60), on obtient

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}, \quad (\text{II.61})$$

où σ est la densité surfacique de charge en un point M d'une nappe de charges, \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont les champs au voisinage de M dans les zones Z_1 et Z_2 séparées par la nappe, et $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ est un vecteur unitaire, normal en M à la nappe et orienté de Z_1 vers Z_2 .

3. Champ créé par un plan uniformément chargé

Soit une distribution de charges uniforme sur le plan (infini) $z = 0$, de densité surfacique σ . Tout plan perpendiculaire au plan Oxy est un plan de symétrie de la distribution de charges, donc, en tout point, $\vec{E} = E_z(x, y, z) \vec{u}_z$. Le plan Oxy est également un plan de symétrie, donc $E_z(x, y, -z) \vec{u}_z = \text{sym}_{Oxy}(E_z[x, y, z] \vec{u}_z) = -E_z(x, y, z) \vec{u}_z$. La distribution est invariante par translation selon n'importe quel axe parallèle à Oxy , donc \vec{E} aussi : $\vec{E} = E_z(z) \vec{u}_z$.

Prenons comme surface de Gauss \mathcal{S} un cylindre tronqué d'axe parallèle à Oz , symétrique par rapport à Oxy et fermé par deux surfaces : une surface \mathcal{S}_1 en $z = \zeta > 0$, et la surface opposée, \mathcal{S}_2 , en $z = -\zeta$, chacune d'aire S . Notons \mathcal{S}_3 la surface parallèle à Oz . On a $\iint_{\mathcal{S}_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$, car $\vec{E} \perp d\vec{S}$ sur \mathcal{S}_3 , et $\iint_{\mathcal{S}_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_z(\zeta) S$, puisque $\vec{E} = E_z(\zeta) \vec{u}_z$ sur \mathcal{S}_1 et que $d\vec{S} = dS (+\vec{u}_z)$ sur cette surface. De même, $\iint_{\mathcal{S}_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E_z(-\zeta) S$ car $d\vec{S} = dS (-\vec{u}_z)$ sur \mathcal{S}_2 .

La charge à l'intérieur du volume délimité par \mathcal{S} vaut σS , donc $E_z(\zeta) - E_z(-\zeta) = \sigma/\varepsilon_0$. Comme $E_z(-\zeta) = -E_z(\zeta)$, on en déduit que $E_z(\zeta) = \sigma/(2\varepsilon_0)$, donc que

$$\vec{E} = \begin{cases} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > 0, \\ - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < 0. \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

En passant de $z < 0$ à $z > 0$, le champ subit bien une discontinuité de $(\sigma/\varepsilon_0) \vec{u}_z$, conformément à la relation (II.61).