

# Chapitre I

## CHAMP ET POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUES

### A. Introduction historique

#### 1. Ambre, aimants et boussoles

L'existence de phénomènes d'électricité statique et de magnétisme est connue depuis des temps anciens. Au 6<sup>e</sup> siècle av. J.-C., le Grec Thalès de Milet aurait ainsi découvert que l'ambre (« êlektron » en grec ancien) était capable d'attirer des corps légers (électricité statique). Il aurait également étudié les propriétés d'aimants naturels, les pierres de Magnésie (une ville d'Asie Mineure, comme Milet).

Les Chinois utilisent au premier millénaire des cuillères aimantées à des fins divinatoires. Celles-ci deviendront vers l'an mille les premières boussoles.

Le Français Pierre de Maricourt décrit au 13<sup>e</sup> siècle les propriétés fondamentales des aimants :

- l'existence sur tout aimant de deux pôles, qualifiés de « nord » et « sud » car pointant en gros (à la déclinaison magnétique près) vers les pôles géographiques nord et sud de la Terre si l'aimant est libre de tourner horizontalement. Trois siècles plus tard, l'Anglais Gilbert comprendra que c'est parce que la Terre se comporte comme un aimant géant<sup>\*1</sup> ;
- l'attraction entre pôles magnétiques contraires et la répulsion entre pôles identiques<sup>\*2</sup> ;
- l'attraction entre le fer et un aimant, ainsi que la possibilité d'aimanter du fer avec un aimant ;
- le fait qu'un aimant brisé ne donne pas un morceau doté d'un pôle nord et un autre doté d'un pôle sud, mais deux aimants (moins puissants) possédant chacun les deux pôles.

L'explication moderne est qu'un aimant n'est pas constitué de « monopôles magnétiques »<sup>\*3</sup> analogues aux charges électriques, mais d'une multitude de « dipôles » microscopiques parallèles, chacun équivalent à une petite boucle de courant.

#### 2. Expériences de du Fay

Au 18<sup>e</sup> siècle, le Français du Fay (ou « Dufay ») mène plusieurs expériences de triboélectricité (électrisation par frottement) et constate les faits suivants :

- un tube de verre frotté par un certain matériau attire une parcelle de feuille d'or ;
- après contact entre le verre et la feuille d'or, celle-ci est violemment repoussée ;
- on obtient les mêmes résultats en remplaçant le verre par de la résine d'ambre ;
- une feuille d'or ayant été mise en contact avec du verre frotté est attirée par de la résine frottée.

(Les expériences réalisées en cours utilisent respectivement une boule de sureau suspendue à un fil et des baguettes de plexiglas et de PVC à la place de la feuille d'or, du verre et de l'ambre. Les baguettes sont frottées à l'aide d'une fourrure.)

Ces expériences permettent à du Fay d'énoncer plusieurs propriétés :

- il existe deux sortes d'« électricités » ;
- les corps portant des « électricités » semblables se repoussent ;
- ceux portant des « électricités » différentes s'attirent.

Avant d'analyser ces expériences en termes modernes, rappelons quelques notions fondamentales :

- la matière ordinaire est constituée d'atomes comprenant des protons, de charge positive, des neutrons, sans charge, et des électrons, de charge négative. Les protons et les neutrons, de masses similaires, sont concentrés dans des noyaux atomiques. Les électrons, bien moins massifs, sont dans des couches

1. On sait maintenant que le champ magnétique terrestre est produit par les mouvements de charges à l'intérieur du Globe.

2. Le pôle nord de l'aiguille aimantée d'une boussole s'orientant vers le pôle magnétique « nord » de la Terre, ce dernier est en réalité un pôle magnétique sud.

3. Ceux-ci pourraient facilement être inclus dans les équations de l'électromagnétisme, mais ils n'ont jamais été observés.

entourant les noyaux. Ils sont en nombre égal aux protons dans les atomes neutres ;

- les électrons portent une charge  $-e$ , où

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{I.1})$$

est la charge élémentaire (« C » est le symbole du coulomb) ; les protons portent une charge  $+e$ <sup>\*4</sup> ;

- les charges de même signe se repoussent, celles de signes opposés s'attirent.

Les expériences de du Fay peuvent alors être interprétées ainsi :

- quand le verre est frotté par un matériau intermédiaire entre le verre et la résine dans la série tribo-électrique<sup>\*5</sup>, ce matériau arrache au verre des électrons, de charge négative, et le verre acquiert une charge positive ;
- avant contact, le verre, chargé positivement, attire les électrons de la feuille d'or, alors neutre, et repousse les protons de celle-ci. Les premiers se rapprochent donc du verre et les derniers s'éloignent. Les électrons de la feuille d'or étant plus proches du verre que les protons, l'attraction l'emporte sur la répulsion ;
- après contact, une partie des électrons de la feuille d'or se déposent sur le verre. Le verre et la feuille ont donc tous deux une charge positive (car le verre était de charge positive et la feuille d'or était neutre avant le contact) et se repoussent ;
- les résultats sont similaires avec de la résine, si ce n'est que, quand elle est frottée par le matériau, elle lui arrache des électrons et acquiert une charge négative. Elle transmet une partie de ces électrons à la feuille d'or lors du contact.

### 3. Conducteurs, isolants et piles

On comprend peu après les expériences de du Fay, notamment grâce aux travaux de l'Américain Franklin sur la foudre, qu'il existe deux types de corps :

- les **conducteurs**, qui permettent le passage d'un courant électrique car ils contiennent un certain nombre de charges libres de se mouvoir (les électrons de conduction dans les métaux ; des ions, c'est-à-dire des atomes ou molécules ayant gagné ou perdu des électrons, dans les solutions électrolytiques ou gels utilisés dans les piles<sup>\*6</sup>) ;
- les **isolants**, dans lesquels les charges sont liées, c.-à-d. presque statiques<sup>\*7</sup> : elles ne peuvent guère s'écarter de leur position.

Cette distinction est illustrée par une expérience simple : quand on approche une baguette frottée de l'extrémité d'une tige métallique (conducteur), une boule de sureau au voisinage de l'autre extrémité est attirée par celle-ci. Ce n'est pas le cas si la tige est en plastique (isolant).

Le premier générateur de tension continue (c.-à-d. constante) est la pile chimique inventée par l'Italien Volta en 1800.

### 4. Unification de l'électricité et du magnétisme

Des expériences effectuées au début du 19<sup>e</sup> siècle par le Danois Ørsted, le Français Ampère et l'Anglais Faraday permettent de montrer que les phénomènes électriques et magnétiques sont reliés. En particulier,

- un corps parcouru par un courant électrique se comporte comme un aimant (un aimant naturel est ainsi peuplé de courants à l'échelle microscopique) ;
- un aimant mobile produit un courant dans un fil électrique.

Ces découvertes sont à la base des alternateurs, dynamos et moteurs électriques.

L'Écossais Maxwell énonce en 1865 les lois de l'électromagnétisme, qui unifient électricité et magnétisme dans une même théorie. Une des conséquences de ces lois est l'existence d'ondes électromagnétiques, qui seront détectées par l'Allemand Hertz et dont le calcul montre que leur vitesse est la même que celle de la lumière, vitesse mesurée antérieurement par les Français Fizeau et Foucault. Maxwell en déduit que la lumière est une onde électromagnétique, ce qui permet d'intégrer l'optique dans l'électromagnétisme.

4. Les protons sont en fait constitués de deux quarks u, de charge  $2e/3$  chacun, et d'un quark d, de charge  $-e/3$ , tandis que les neutrons possèdent un u et deux d. Les quarks ne sont cependant jamais observés isolément.

5. Voir [en.wikipedia.org/wiki/Triboelectric\\_effect#Triboelectric\\_series](http://en.wikipedia.org/wiki/Triboelectric_effect#Triboelectric_series).

6. Les ions positifs, ou cations, sont attirés par l'électrode négative, la cathode ; les ions négatifs, ou anions, le sont par l'électrode positive, l'anode.

7. Le caractère isolant d'un corps n'a rien d'absolu : l'air, habituellement isolant, peut ainsi devenir conducteur si le champ électrique est suffisant pour l'ioniser (cas de la foudre).

## 5. Révolution relativiste

On pense initialement que les ondes électromagnétiques se déplacent dans un milieu, l'Éther, faisant office de référentiel galiléen absolu. L'impossibilité de mesurer le moindre mouvement par rapport à l'Éther (expérience de Michelson & Morley) et la théorie de la relativité restreinte, énoncée par l'Allemand Einstein en 1905, conduisent à renoncer à ce concept. La théorie de la relativité repose sur deux principes :

- tous les référentiels galiléens sont équivalents pour l'énoncé des lois de la physique ;
- il existe une vitesse fondamentale finie (et indépassable) —la vitesse de la lumière— dont la valeur est la même dans tous les référentiels galiléens.

Le premier principe était déjà au fondement de la mécanique newtonienne. Le second, en revanche, est en contradiction avec la loi classique de composition des vitesses et impose que les distances et les durées entre deux événements perçues par un observateur dépendent de son mouvement. Si les lois de l'électromagnétisme conservent en relativité restreinte la formulation donnée par Maxwell, les lois de la mécanique classique doivent en revanche être modifiées pour être conciliées avec l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel galiléen (pour la gravitation, il faudra cependant attendre la relativité générale, proposée par Einstein en 1915).

## B. Loi de Coulomb

### 1. Énoncé et propriétés

La force exercée par une particule<sup>\*8</sup> située en  $P$ , de charge  $Q$  et immobile par rapport à un référentiel galiléen, sur une particule située en  $M$ , de charge  $q$  et également immobile, est donnée par la loi énoncée par le Français Coulomb en 1785 :

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r, \quad (\text{I.2})$$

où  $r = PM$  ( $:= \|\vec{PM}\|$ ),  $\vec{u}_r$  est un vecteur unitaire dirigé de  $P$  vers  $M$ , les charges sont en coulombs<sup>\*9</sup>,  $\epsilon_0$  est une constante appelée **permittivité du vide** et

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ SI}. \quad (\text{I.3})$$

La **force de Coulomb** (dite aussi **électrostatique**) peut être réécrite sous la forme

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}, \quad (\text{I.4})$$

puisque  $\vec{u}_r = \vec{PM}/PM$ . Elle respecte la 3<sup>e</sup> loi de Newton :  $\vec{F}_{q \rightarrow Q} = -\vec{F}_{Q \rightarrow q}$  (version faible) et  $\vec{F}$  est en outre centrale, c.-à-d.  $\vec{F} \parallel \vec{PM}$  (version forte).

### 2. Neutralité électrique et forces de contact

La force électrostatique est en  $1/r^2$ , comme la force de gravitation universelle. Contrairement à cette dernière, qui est toujours attractive, la force de Coulomb est attractive si les charges sont de signes opposés et répulsive sinon, conformément à la loi de du Fay.

Comparons l'intensité de ces deux forces entre un électron (de masse  $m_e$ ) et un proton (de masse  $m_p$ ) :

$$\frac{\|\vec{F}_{\text{élec}}\|}{\|\vec{F}_{\text{grav}}\|} = \frac{|+e||-e|}{4\pi\epsilon_0 \times G m_p m_e} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \times 9 \cdot 10^9}{6,67 \cdot 10^{-11} \times 1,67 \cdot 10^{-27} \times 9,11 \cdot 10^{-31}} \approx 2 \cdot 10^{39}. \quad (\text{I.5})$$

L'intensité de la force gravitationnelle est donc infime par rapport à celle de la force électrostatique. Si la force électrostatique n'intervient généralement pas explicitement dans les problèmes de mécanique, contrairement au poids, c'est que le nombre d'électrons est égal au nombre de protons : lorsqu'un excès d'électrons survient

8. Au sens de « point matériel ».

Rigoureusement, il faudrait distinguer trois choses : la particule, la valeur de sa charge et sa position. Bien souvent, on utilisera le mot « charge » non seulement pour la valeur de celle-ci, mais aussi pour la particule qui la porte (de la même manière que pour le mot « masse » en mécanique), et on utilisera la même notation pour les deux. On distinguera la « densité de charge » (au singulier), c.-à-d. la valeur de la charge par unité de volume (par exemple), de la « densité de charges » (au pluriel), c.-à-d. le nombre de porteurs de charge par unité de volume.

De même, il nous arrivera d'appeler « point » à la fois la particule (point matériel) et sa position (point géométrique), et d'utiliser la même notation pour les deux. Ceci ne devrait susciter aucune confusion. En revanche, il est fortement déconseillé de noter de la même manière la valeur de la charge et sa position.

9. Nous utiliserons systématiquement les unités du système international (SI). D'autres systèmes sont parfois utilisés, mais les lois prennent alors une forme différente.

en un endroit, ceux-ci se repoussent entre eux et sont attirés par les protons ; la neutralité électrique est donc rapidement rétablie à l'échelle macroscopique. Or la force exercée par de la matière neutre décroît bien plus rapidement qu'en  $1/r^2$ , comme nous le verrons en étudiant les dipôles (cf. chap. III).

La matière n'est pas neutre en revanche à l'échelle microscopique (par exemple au voisinage du noyau d'un atome). La force électromagnétique est d'ailleurs l'interaction fondamentale à l'origine de toutes les forces de contact (réaction normale, adhérence, frottements, cohésion d'un solide, pression, tension superficielle...), même si leur expression phénoménologique ne le laisse pas apparaître.

En outre, même quand la matière est neutre et n'a pas d'effet électrostatique à grande distance, elle peut être parcourue par des courants de charges, lesquels créent un champ magnétique.

### 3. Cas de charges mobiles (hors programme)

L'expression (I.4) n'est plus rigoureusement valable si les charges sont mobiles car l'interaction n'est pas instantanée. La force exercée par une charge  $Q$  sur une charge  $q$  située à un instant  $t$  en un point  $M(t)$  devient alors

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(\vec{r} \cdot \vec{w})^3} \left( \vec{Z} + \frac{\vec{v}}{c} \times [\vec{u}_r \times \vec{Z}] \right), \quad (\text{I.6})$$

où

- $\vec{Z} = \vec{X} + \vec{Y}$ , avec  $\vec{X} = (c^2 - v'^2)\vec{w}$  et  $\vec{Y} = \vec{r} \times (\vec{w} \times \vec{a}')$  ;
- $c$  est la vitesse de propagation de l'interaction électromagnétique (c.-à-d. la vitesse de la lumière) dans le vide ;
- $t'$  est le temps retardé, c.-à-d. l'unique  $t' \leq t$  tel que  $\|\overrightarrow{P(t')M(t)}\| = c(t - t')$ , où  $P(t')$  est la position de  $Q$  à l'instant  $t'$  ;
- $\vec{r} = \overrightarrow{P(t')M(t)}$ ,  $r = \|\vec{r}\|$  et  $\vec{u}_r = \vec{r}/r$  ;
- $\vec{v}$  est la vitesse de  $q$  à l'instant  $t$  ;
- $\vec{v}'$  et  $\vec{a}'$  sont les vitesse et accélération de  $Q$  à l'instant  $t'$  ;
- $v' = \|\vec{v}'\|$  et  $\vec{w} = c\vec{u}_r - \vec{v}'$ .

Quelques remarques sur l'expression (I.6) :

- **cette formule n'est absolument pas à connaître !** ;
- l'interaction électromagnétique se déplace à la vitesse de la lumière. Cette vitesse étant finie (et indépendante du référentiel dès lors que celui-ci est galiléen), la force subie par  $q$  à un instant  $t$  dépend de la position de  $Q$  à un instant  $t'$  antérieur :  $c(t - t')$  est simplement le temps de propagation de l'interaction de  $P(t')$  à  $M(t)$  ;
- Les particules jouent des rôles asymétriques via leurs positions, vitesses et accélérations. En conséquence, la 3<sup>e</sup> loi de Newton n'est généralement pas valable en électromagnétisme. La quantité de mouvement (*linear momentum* ou simplement *momentum* en anglais) d'un système isolé est néanmoins conservée si l'on tient compte, outre de celle des particules, de la quantité de mouvement associée au champ électromagnétique ;
- la force sur  $q$  dépend non seulement des positions et des vitesses des charges, mais aussi de l'accélération de  $Q$ . Elle comprend deux termes :
  - le premier, en  $1/r^2$ , généralise la loi de Coulomb et correspond au terme  $\vec{X}$  ;
  - le second, en  $1/r$ , correspondant à  $\vec{Y}$ . Il est appelé « terme radiatif » car c'est lui qui explique le rayonnement électromagnétique. Noter qu'il domine le premier à grande distance, mais qu'il n'apparaît que si l'accélération de  $Q$  est non nulle ;
- l'expression (I.6) est valable quelle que soit la vitesse, mais  $\vec{F} \neq m\vec{a}$  si  $v/c \ll 1$  (cf. § I.A.5).

### c. Champ électrostatique

L'équation (I.4) peut être réécrite

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = q\vec{E}_Q(M), \quad (\text{I.7})$$

où

$$\vec{E}_Q(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (\text{I.8})$$

est le **champ électrique** créé en  $M$  par la charge  $Q$  située en  $P$ . Dans le système international d'unités, cette quantité est exprimée en  $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$  ( $= \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$ ), où « V » est le symbole du **volt**. L'expression (I.8) n'est valable que si  $Q$  est immobile.

Considérons maintenant un ensemble de charges  $Q_1, \dots, Q_n$  situées aux points  $P_1, \dots, P_n$ . Si la charge  $q$

est immobile, la résultante  $\vec{F}_{\rightarrow q} = \sum_i \vec{F}_{Q_i \rightarrow q}$  des forces exercées par les charges  $Q_i$  sur  $q$  vaut

$$\vec{F}_{\rightarrow q} = q \vec{E}(M), \quad (\text{I.9})$$

où

$$\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i(M) \quad (\text{I.10})$$

$$= \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}_i M}{P_i M^3} \quad (\text{I.11})$$

est le champ électrique créé en  $M$  par toutes les charges sauf  $q$ , et  $\vec{E}_i(M) := \vec{E}_{Q_i}(M)$ .

L'expression (I.9) distingue la charge  $q$  placée en  $M$ , dite parfois **charge test**, des charges  $Q_i$ , **sources** du champ  $\vec{E}(M)$  auquel  $q$  est soumise. L'intérêt de cette distinction, outre de faciliter les calculs, est que les champs ont une réalité intrinsèque : on peut ainsi leur associer une quantité de mouvement, une énergie ; par ailleurs, le délai entre le changement de trajectoire d'une source et l'effet sur la force ressentie par la charge test correspond au temps de propagation du champ de l'une à l'autre. On peut également étudier la propagation des ondes électromagnétiques, c.-à-d. des champs, indépendamment des sources qui les ont produits. Remarque que  $\vec{E}(M)$  ne dépend pas de la présence ou non en  $M$  de la charge  $q$ .

L'équation (I.11) n'est valable que dans le cadre de l'**électrostatique, c.-à-d. si les sources  $Q_i$  sont immobiles**. Pour souligner ceci, on utilisera souvent le terme **champ électrostatique** plutôt que « champ électrique » dans ce cas.

Les équations (I.9) et (I.10) sont en revanche valables quel que soit le mouvement des charges  $Q_i$ .<sup>\*10</sup> L'équation (I.10) traduit le "**principe de superposition** : le champ électrique produit par une combinaison linéaire de distributions de charges et de courants de charges est la combinaison linéaire des champs électriques produits par chacune de ces distributions. (De même, nous le verrons, pour le champ magnétique.) Ce "principe" est en fait un théorème découlant de la linéarité des relations fondamentales de l'électromagnétisme entre les champs et leurs sources.

## D. Potentiel électrostatique

### 1. Préliminaires

#### a. Différentielle du carré d'une fonction vectorielle

Pour toute fonction vectorielle  $\vec{f}$ , on a  $d(\vec{f} \cdot \vec{f}) = 2\vec{f} \cdot d\vec{f}$ . Or  $\vec{f} \cdot \vec{f} = \|\vec{f}\|^2$  et  $d(\|\vec{f}\|^2) = 2\|\vec{f}\| d(\|\vec{f}\|)$ , donc

$$\vec{f} \cdot d\vec{f} = \|\vec{f}\| d(\|\vec{f}\|). \quad (\text{I.12})$$

En particulier, pour une fonction de *norme* constante,  $d(\|\vec{f}\|) = 0$ , donc  $\vec{f} \perp d\vec{f}$ .

#### b. Circulation d'une fonction vectorielle

On appelle **circulation**  $\mathcal{C}$  d'une fonction  $\vec{f}(\vec{r})$  sur un chemin  $\widetilde{AB}$  l'intégrale  $\int_{\widetilde{AB}} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ . Précisons la signification de cette dernière. Symboliquement, en coordonnées cartésiennes,

$$\int_{\widetilde{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{\widetilde{AB}} (f_x[x, y, z] dx + f_y[x, y, z] dy + f_z[x, y, z] dz), \quad (\text{I.13})$$

mais cette expression n'a guère de sens car on ne sait par rapport à quelle variable l'intégration est effectuée. Plus explicitement,

$$\int_{\widetilde{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{r} := \int_{u=u_A}^{u_B} \left( f_x[x(u), y(u), z(u)] \frac{dx}{du} + f_y[x(u), y(u), z(u)] \frac{dy}{du} + f_z[x(u), y(u), z(u)] \frac{dz}{du} \right) du, \quad (\text{I.14})$$

où  $u$  est n'importe quelle quantité (l'abscisse curviligne, le temps...) paramétrant le chemin  $\widetilde{AB}$ , c.-à-d. variant continûment de  $u_A$  à  $u_B$  et de manière strictement monotone le long de ce chemin. La circulation de  $\vec{f}$  sur le chemin  $\widetilde{AB}$  est indépendante du paramétrage adopté.

10. Uniquement si  $q$  est immobile pour l'équation (I.9). Sinon, une force magnétique apparaît.

## 2. Gradient d'une fonction scalaire de la position

Soit  $f$  une fonction ne dépendant que de la position. En coordonnées cartésiennes, la variation de  $f$  entre deux points séparés de  $d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$  vaut

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{r}, \quad (\text{I.15})$$

où

$$\overrightarrow{\text{grad}} f := \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \quad (\text{I.16})$$

est l'opérateur **gradient**. Le gradient de  $f$  est souvent aussi noté  $\vec{\nabla} f$ , où  $\vec{\nabla}$  est le « vecteur »<sup>\*11</sup> **nabla** défini par

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{I.17})$$

En coordonnées cylindriques,

$$d\vec{r} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\phi \vec{u}_\phi + dz \vec{u}_z, \quad (\text{I.18})$$

donc, puisque

$$df = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial z} dz, \quad (\text{I.19})$$

on obtient, par identification des facteurs devant  $d\rho$ ,  $d\phi$  et  $dz$  dans les expressions de  $df$  et de  $\vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$ , que

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\vec{u}_\phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{I.20})$$

De même, en coordonnées sphériques,

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{u}_\phi, \quad (\text{I.21})$$

donc

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\vec{u}_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (\text{I.22})$$

## 3. Définition du potentiel

Le champ créé en un point  $M$  par une charge  $Q$  fixe située en  $P$  vaut

$$\vec{E}_Q(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}. \quad (\text{I.23})$$

Considérons un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  de  $M$ <sup>\*12</sup> et calculons la circulation élémentaire de  $\vec{E}_Q$ ,  $d\mathcal{C} = \vec{E}_Q \cdot d\vec{r}$ <sup>\*13</sup>. On a

$$d\vec{r} = d(r \vec{u}_r) = dr \vec{u}_r + r d\vec{u}_r, \quad (\text{I.24})$$

donc

$$\vec{E}_Q \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (dr \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r + r \vec{u}_r \cdot d\vec{u}_r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{r}\right), \quad (\text{I.25})$$

où l'on a déduit que  $\vec{u}_r \cdot d\vec{u}_r = 0$  de la constance de la norme de  $\vec{u}_r$  (vecteur unitaire) en appliquant le résultat du § I.D.1.a. Il existe donc une fonction,

$$V_Q(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + c^{\text{te}}, \quad (\text{I.26})$$

telle que

$$dV_Q = -\vec{E}_Q \cdot d\vec{r}. \quad (\text{I.27})$$

La quantité  $V_Q(M)$  est appelée **potentiel électrostatique** créé par la charge  $Q$  en  $M$ . Son unité dans le système international est le **volt** (symbole « V »).

11. Attention,  $\vec{\nabla}$  n'est pas un vrai vecteur : par exemple,  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) g \neq (\vec{f} \cdot \vec{\nabla}) g$ .

12. Il s'agit d'un déplacement du point géométrique  $M$ , pas de la charge ponctuelle qui peut éventuellement s'y trouver.

13. Nous utilisons la notation «  $d\mathcal{C}$  », avec un « d » barré, pour souligner que la circulation élémentaire est une quantité infinitésimale, mais qu'on ne sait pas *a priori* si elle est égale à la différentielle  $df$  d'une certaine fonction  $f$  (ici, «  $-V$  »), c.-à-d. à une *variation* infinitésimale de  $f$ . La même distinction sera parfois faite pour d'autres quantités par la suite, notamment lorsqu'il y aura un risque de confusion.

La notation «  $\delta$  » au lieu de «  $d$  » est également courante.

Pour un ensemble de charges  $Q_1, \dots, Q_n$ , on a

$$\vec{E}(M) \cdot d\vec{r} = \left( \sum_i \vec{E}_i[M] \right) \cdot d\vec{r} = \sum_i (\vec{E}_i[M] \cdot d\vec{r}) = - \sum_i dV_i(M) = -d \left( \sum_i V_i[M] \right). \quad (\text{I.28})$$

Donc, pour tout champ électrostatique, il existe une quantité  $V$ , le potentiel électrostatique, telle que, lors d'un déplacement infinitésimal,

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}, \quad (\text{I.29})$$

avec

$$V(M) = \sum_i V_i(M) \quad (\text{I.30})$$

$$= \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M} + c^{\text{te}}. \quad (\text{I.31})$$

Noter que le potentiel  $V(M)$  créé en  $M$  par l'ensemble des charges (sauf la charge ponctuelle éventuellement présente en  $M$ !) obéit au principe de superposition. Le potentiel électrostatique n'est fonction que d'une seule variable, la position de  $M$ <sup>14</sup>.

$V$  est défini à une constante près, que l'on peut choisir arbitrairement. **On adopte généralement la convention que  $V$  est nul à l'infini.** On a alors  $c^{\text{te}} = 0$  dans (I.31). Cette convention peut être inadaptée lorsque la distribution de charges n'est pas bornée (c.-à-d. s'il y a des charges jusqu'à l'infini), par exemple pour un plan infini uniformément chargé.

#### 4. Propriétés du potentiel électrostatique

Plusieurs propriétés découlent de l'existence d'un potentiel  $V(\vec{r})$  tel que  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$ .

- La circulation de  $\vec{E}$  sur un chemin  $\widetilde{AB}$ , c.-à-d. l'intégrale de chemin  $\int_{\widetilde{AB}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ , ne dépend pas du chemin suivi mais seulement des points de départ et d'arrivée  $A$  et  $B$ . En effet,

$$\int_{\widetilde{AB}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\widetilde{AB}} -dV = V(A) - V(B). \quad (\text{I.32})$$

En corollaire, la circulation de  $\vec{E}$  sur un chemin fermé ( $A = B$ ) est nulle :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (\text{I.33})$$

- $V$  ne dépendant que de la position, on a  $dV = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{r}$  lors d'un déplacement infinitésimal  $d\vec{r}$ . Par ailleurs,  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$  en électrostatique. Les deux égalités étant vérifiées quel que soit  $d\vec{r}$ , on en déduit que

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V. \quad (\text{I.34})$$

Le potentiel étant un scalaire, alors que  $\vec{E}$  est un vecteur, il est souvent plus commode de calculer  $V$  et d'en déduire  $\vec{E}$  par l'équation (I.34) que de calculer directement  $\vec{E}$ .

- **Le potentiel est une fonction continue, sauf aux points où le champ tend vers l'infini.** Ceci découle directement de  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$  : quand  $d\vec{r}$  tend vers 0,  $dV$  tend vers 0 si  $\vec{E}$  est fini dans le voisinage.

Nous verrons en revanche au § II.E que le champ électrique est discontinu au voisinage d'une surface chargée (et, *a fortiori*, d'une courbe chargée ou d'une charge ponctuelle).

## E. Équipotentiels et lignes de champ

### 1. Équipotentiels

L'ensemble des points de l'espace dont le potentiel  $V(x, y, z)$  est égal à une certaine valeur constante  $C$  constitue l'**équipotentielle** de potentiel  $C$  (une surface, sauf cas dégénéré).

Considérons une surface équipotentielle passant par un point  $M$ , ainsi qu'un déplacement infinitésimal quelconque  $(d\vec{r})_1$ , depuis  $M$ , au sein de cette surface. Le vecteur  $(d\vec{r})_1$  est alors dans le plan tangent en  $M$  à la surface. Or  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$  et la variation  $(dV)_1$  du potentiel lors du déplacement  $(d\vec{r})_1$  est nulle par définition :  $\vec{E}$  est donc perpendiculaire à  $(d\vec{r})_1$ . Ceci étant vrai quel que soit la direction du déplacement infinitésimal  $(d\vec{r})_1$

14. Plus loin dans ce cours (chap. VIII),  $V$  désignera le **potentiel scalaire** et pourra dépendre aussi du temps. Si les sources sont immobiles, on peut néanmoins éliminer la dépendance temporelle dans le potentiel scalaire ; celui-ci se réduit alors au potentiel électrostatique. Si ce n'est pas le cas, les expressions (I.29), (I.26), (I.32), (I.33) et (I.34) ne sont plus valables.

dans le plan tangent, on en déduit que, en tout point, le champ  $\vec{E}$  est perpendiculaire à l'équipotentielle locale.

Considérons maintenant un déplacement infinitésimal  $(d\vec{r})_2$  perpendiculaire à l'équipotentielle de potentiel  $V$  et dirigé vers celle de potentiel  $V + (dV)_2$ , avec  $(dV)_2 > 0$ . Comme on vient de le montrer, le champ  $\vec{E}$  est parallèle à  $(d\vec{r})_2$ , et  $\vec{E} \cdot (d\vec{r})_2 = -(dV)_2 < 0$ . On en déduit que le champ électrique est dirigé vers les potentiels décroissants.

## 2. Lignes et tubes de champ

On appelle *ligne de champ* le lieu des points de l'espace tels que le champ électrique est tangent à la ligne de champ en tout point de celle-ci. Sauf cas dégénéré, une ligne de champ est une courbe de l'espace. Les lignes de champ sont orientées conventionnellement dans le sens de  $\vec{E}$ . Comme  $\vec{E}$  est orthogonal en tout point à l'équipotentielle en ce point, les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentielles.

Un *tube de champ* est un faisceau de lignes de champ traversant une surface.

Considérons, à partir d'un point  $M$  quelconque, un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  le long de la ligne de champ passant par  $M$ . On a alors  $\vec{E}(M) \parallel d\vec{r}$ , ce qu'on peut aussi écrire

$$\vec{E}(M) \times d\vec{r} = \vec{0}, \quad (\text{I.35})$$

ce qui fournit l'équation différentielle vectorielle (ou, de manière équivalente, trois équations différentielles scalaires couplées) définissant la ligne de champ. En coordonnées cartésiennes, par exemple,

$$\begin{cases} E_y(x, y, z) dz - E_z(x, y, z) dy = 0, \\ E_z(x, y, z) dx - E_x(x, y, z) dz = 0, \\ E_x(x, y, z) dy - E_y(x, y, z) dx = 0. \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

La résolution de ces équations différentielles fait apparaître trois constantes indéterminées. La valeur de ces constantes est fixée par le choix d'un point quelconque sur la ligne de champ considérée.

## 3. Cas d'une charge ponctuelle

Dans le cas d'une charge ponctuelle, les lignes de champ sont radiales (ce sont des demi-droites issues de la charge). Elles divergent de la charge si celle-ci est positive et convergent vers celle-ci si elle est négative. Les équipotentielles sont des sphères (c.-à-d. des surfaces sphériques, par opposition aux boules, lesquelles sont pleines). Le potentiel décroît vers l'extérieur si la charge est positive et croît si elle est négative. Il vaut  $+\infty$  à l'emplacement d'une charge ponctuelle dans le premier cas et  $-\infty$  dans le second.

## F. Distributions continues de charges

### 1. Expressions de $\vec{E}$ et $V$

Les expressions (I.11) et (I.31) sont données pour une distribution discrète de charges, c.-à-d. pour des charges ponctuelles. Pour des distributions continues de charges dans un volume  $\mathcal{V}$  de l'espace, sur une surface  $\mathcal{S}$  ou le long d'une courbe  $\mathcal{C}$ , il suffit de faire les substitutions suivantes :

Distr. discrète	Distr. volumique	Distr. surfacique	Distr. linéique
$P_i$	$P \in \mathcal{V}$	$P \in \mathcal{S}$	$P \in \mathcal{C}$
$Q_i$	$\rho(P) d\tau$	$\sigma(P) d\mathcal{S}$	$\lambda(P) d\ell$
$\Sigma_i$	$\iiint_{P \in \mathcal{V}}$	$\iint_{P \in \mathcal{S}}$	$\int_{P \in \mathcal{C}}$

Les quantités  $\rho(P)$ ,  $\sigma(P)$  et  $\lambda(P)$  sont, respectivement, les densités (finies) volumique, surfacique et linéique<sup>\*15</sup> de charge au point  $P$ , pour la distribution ;  $d\tau$ ,  $d\mathcal{S}$  et  $d\ell$  sont les éléments de volume, de surface ou de longueur<sup>\*16</sup> autour de  $P$ .

Le champ créé en  $M$  par une distribution volumique de charges occupant un volume  $\mathcal{V}$  est ainsi donné

15. On dit aussi plus simplement « charge volumique, surfacique, linéique ».

16. On utilise les mêmes appellations et notations pour l'objet géométrique considéré et pour la mesure de son extension. Ainsi, selon le contexte, « élément de surface » désigne soit un ensemble de points sur une portion infinitésimale de  $\mathcal{S}$ , soit son aire.

par<sup>\*17</sup>

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\varrho(P) \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau. \quad (\text{I.37})$$

De même<sup>\*18</sup>,

$$V(M) = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\varrho(P)}{PM} d\tau \quad (\text{I.38})$$

(avec la convention  $V(\infty) = 0$ ).

Il est généralement plus simple, si l'on n'applique pas le théorème de Gauss (cf. chap. II), de calculer le potentiel et d'en déduire le champ que de faire l'inverse : il y a moins d'intégrales à calculer, puisque  $V$  est scalaire alors que  $\vec{E}$  est vectoriel ; par ailleurs, pour obtenir  $\vec{E}$ , il suffit de calculer le gradient de  $V$ , c.-à-d. de le dériver, tandis que l'inverse requiert une intégration sur un chemin.

Pour un mélange de distributions de plusieurs types (discrète, surfacique, etc.), il faut calculer le potentiel ou le champ créé par chacune et appliquer le principe de superposition.

## 2. Application : sphère et boule uniformément chargées

### a. Préliminaire : intégrale multiple d'une fonction à variables séparables sur un pavé droit

Une fonction  $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$  est dite à variables séparables, si, pour tout point  $(x, y)$  dans le domaine considéré, on a  $f(x, y) = g(x)h(y)$ , où  $g$  et  $h$  sont des fonctions ne dépendant, respectivement, que de  $x$  et que de  $y$ .

Si  $f$  est à variables séparables et que, dans l'intégrale ci-dessous, les bornes  $c$  et  $d$  sur  $y$  sont indépendantes de  $x$ , alors

$$\int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x, y) dx dy = \left( \int_{x=a}^b g[x] dx \right) \int_{y=c}^d h(y) dy. \quad (\text{I.39})$$

Ceci se généralise bien évidemment à un nombre quelconque de dimensions.

### b. Sphère uniformément chargée

Considérons une sphère [creuse]  $\mathcal{S}$  (c.-à-d. une surface sphérique) de centre  $O$  et de rayon  $R$  portant une charge  $Q$  uniformément répartie. Le potentiel créé en un point  $M$  à une distance  $r$  de  $O$  vaut

$$V_{\mathcal{S}}(M) = \iint_{P \in \mathcal{S}} \frac{\sigma}{4 \pi \varepsilon_0 PM} dS(P), \quad (\text{I.40})$$

où  $\sigma = Q/(4 \pi R^2)$  est la charge surfacique (uniforme) sur la sphère et  $dS$  est un élément de surface de celle-ci, centré en  $P$ . Pour simplifier les calculs, prenons un axe  $(Oz)$  orienté vers  $M$  et utilisons les coordonnées sphériques  $(R, \theta, \phi)$  de  $P$ . On a  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$  et

$$PM^2 = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})^2 = PO^2 + OM^2 + 2 \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM} = R^2 + r^2 - 2 R r \cos \theta, \quad (\text{I.41})$$

car  $\theta = \angle(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$ , donc, en appliquant le résultat (I.39),

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{S}}(M) &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\sigma}{4 \pi \varepsilon_0 \sqrt{R^2 + r^2 - 2 R r \cos \theta}} R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \left( \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\sigma R^2}{4 \pi \varepsilon_0} d\phi \right) \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 R r \cos \theta}} d\theta \\ &= \frac{\sigma R^2}{2 \varepsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 R r \cos \theta}} d\theta. \end{aligned} \quad (\text{I.42})$$

Faisons le changement de variable  $\theta \mapsto u = R^2 + r^2 - 2 R r \cos \theta$ . On a

$$\frac{du}{d\theta} = 2 R r \sin \theta, \quad (\text{I.43})$$

17. On peut intégrer, de manière équivalente, sur tous les points  $P$  de l'espace, puisque  $\varrho(P) = 0$  hors du volume occupé par la distribution de charges.

18. La même notation est souvent utilisée, mais il est important de bien distinguer la variation infinitésimale du potentiel entre deux points voisins,  $dV$ , de la contribution infinitésimale au potentiel en  $M$  due à la charge dans le volume  $d\tau$  entourant  $P$ ,  $dV = \varrho(P) d\tau / (4 \pi \varepsilon_0 PM)$ .

$u(\theta = 0) = (R - r)^2$  et  $u(\theta = \pi) = (R + r)^2$ , d'où

$$V_S(M) = \frac{\sigma R}{2 \varepsilon_0 r} \int_{u=(R-r)^2}^{(R+r)^2} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{\sigma R}{2 \varepsilon_0 r} \left[ \sqrt{u} \right]_{u=(R-r)^2}^{(R+r)^2} = \frac{\sigma R}{2 \varepsilon_0 r} (R + r - |R - r|). \quad (\text{I.44})$$

Il faut distinguer deux cas :

- si  $M$  est à l'intérieur de la sphère,  $r \leq R$ , donc  $|R - r| = R - r$  et

$$V_S(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 R} =: V_S^{\text{int}}(r); \quad (\text{I.45})$$

- si  $M$  est à l'extérieur de la sphère,  $r \geq R$ , donc  $|R - r| = r - R$  et

$$V_S(M) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r} =: V_S^{\text{ext}}(r). \quad (\text{I.46})$$

Remarquer que  $V_S$  est continu en  $r = R$  :

$$V_S(R^-) = V_S^{\text{int}}(R) = V_S^{\text{ext}}(R) = V_S(R^+). \quad (\text{I.47})$$

Calculons maintenant le champ électrostatique :

- pour  $r < R$ , on a  $V_S^{\text{int}} = c^{\text{te}}$ , donc

$$\vec{E}_S^{\text{int}}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V_S^{\text{int}} = \vec{0}; \quad (\text{I.48})$$

- pour  $r > R$ , en fonction des coordonnées sphériques  $(r, \vartheta, \varphi)$  de  $M$ ,

$$\vec{E}_S^{\text{ext}}(M) = -\frac{\partial V_S^{\text{ext}}}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V_S^{\text{ext}}}{\partial \vartheta} \vec{u}_\vartheta - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V_S^{\text{ext}}}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r. \quad (\text{I.49})$$

Remarquer que  $\vec{E}_S$  est discontinu et non défini en  $r = R$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}_S(R^+) &= \vec{E}_S^{\text{ext}}(R) = Q/(4 \pi \varepsilon_0 R^2) \vec{u}_r \\ &\neq \vec{E}_S(R^-) = \vec{E}_S^{\text{int}}(R) = \vec{0}. \end{aligned} \quad (\text{I.50})$$

### c. Boule uniformément chargée

Considérons une boule [pleine]  $\mathcal{B}$  (c.-à-d. un volume sphérique) de centre  $O$  et de rayon  $R$  portant une charge  $Q$  uniformément répartie. Le potentiel créé en un point  $M$  à une distance  $r$  de  $O$  vaut

$$V_{\mathcal{B}}(M) = \iiint_{P \in \mathcal{B}} \frac{\varrho}{4 \pi \varepsilon_0 PM} d\tau(P), \quad (\text{I.51})$$

où  $\varrho = 3Q/(4 \pi R^3)$  est la charge volumique (uniforme) dans la boule et  $d\tau$  est un élément de volume de celle-ci, centré en  $P$ . On a, en notant  $(R', \theta, \phi)$  les coordonnées sphériques de  $P$ ,

$$V_{\mathcal{B}}(M) = \int_{R'=0}^R \left( \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\varrho dR'}{4 \pi \varepsilon_0 PM} R'^2 \sin \theta d\theta d\phi \right) = \int_{R'=0}^R dV_{S'}(M), \quad (\text{I.52})$$

où  $dV_{S'}(M)$  est le potentiel créé en  $M$  par une coquille sphérique  $S'$  de rayon  $R'$  et d'épaisseur infinitésimale  $dR'$ . Le potentiel créé par cette coquille est égal à celui d'une sphère de rayon  $R'$  portant la charge surfacique  $\sigma = \varrho dR'$ , déjà connu (équations (I.45) et (I.46)).

Si  $M$  est à l'extérieur de la boule,  $M$  est à l'extérieur de toutes les coquilles sphériques, donc

$$V_{\mathcal{B}}^{\text{ext}}(M) = \int_{R'=0}^R \frac{\varrho R'^2}{\varepsilon_0 r} dR' = \frac{\varrho R^3}{3 \varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r}. \quad (\text{I.53})$$

L'expression de  $V_{\mathcal{B}}^{\text{ext}}$  étant la même que celle obtenue à l'extérieur d'une sphère uniformément chargée en surface ( $V_S^{\text{ext}}$ ), on a encore, pour  $r > R$ ,

$$\vec{E}_{\mathcal{B}}^{\text{ext}}(M) = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r. \quad (\text{I.54})$$

En revanche, si  $M$  est à l'intérieur de la boule,  $M$  est à l'extérieur de toutes les coquilles de rayon  $R' \leq r$  et à l'intérieur de celles de rayon  $R' \geq r$ , donc

$$V_{\mathcal{B}}^{\text{int}}(M) = \int_{R'=0}^r \frac{\varrho R'^2}{\varepsilon_0 r} dR' + \int_{R'=r}^R \frac{\varrho R'}{\varepsilon_0} dR' = \frac{\varrho r^2}{3 \varepsilon_0} + \frac{\varrho}{2 \varepsilon_0} (R^2 - r^2) = -\frac{\varrho r^2}{6 \varepsilon_0} + \frac{\varrho R^2}{2 \varepsilon_0}. \quad (\text{I.55})$$

Le champ électrique à l'intérieur de la boule vaut

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\mathcal{B}}^{\text{int}}(M) &= -\frac{\partial V_{\mathcal{B}}^{\text{int}}}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\mathcal{B}}^{\text{int}}}{\partial \vartheta} \vec{u}_{\vartheta} - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V_{\mathcal{B}}^{\text{int}}}{\partial \varphi} \vec{u}_{\varphi} \\ &= \frac{\rho r}{3 \varepsilon_0} \vec{u}_r = \frac{Q r^3}{R^3} \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r,\end{aligned}\quad (\text{I.56})$$

où  $Q_{\text{int}}(r) = Q r^3 / R^3$  est la charge à l'intérieur de la sphère de rayon  $r$ .

**Remarques :**

- Quand  $r \rightarrow R^-$ ,  $Q_{\text{int}}(r) \rightarrow Q$ , donc  $\vec{E}_{\mathcal{B}}(R^-) = \vec{E}_{\mathcal{B}}(R^+)$  :  $\vec{E}_{\mathcal{B}}$  est continu en  $r = R$ . C'est un résultat que nous démontrerons au § II.E :  $\vec{E}$  est discontinu de part et d'autre d'une distribution surfacique de charges ; il est revanche continu en tout point pour une distribution volumique. Le potentiel  $V$ , lui, est continu dans les deux cas.
- Dans tous les cas (sphère ou boule,  $M$  à l'intérieur ou à l'extérieur), le champ  $\vec{E}$  a la même expression que celui produit par une source ponctuelle située au centre de la sphère et de charge égale à la charge  $Q_{\text{int}}(r)$  à l'intérieur de la sphère de rayon  $r$  : la charge à l'extérieur ne compte pas. Ce résultat est plus généralement valable pour toute distribution de charges admettant une symétrie sphérique (cf. § II.B.2). Il en est de même pour  $V$ , à une constante additive près. Cette constante dépend de la zone considérée si l'expression de  $\vec{E}$  en dépend aussi ; elle est fixée par la convention adoptée sur la valeur de  $V$  en un certain point (généralement,  $V(r \rightarrow \infty) = 0$ ) et par la continuité de  $V$  à l'interface entre les zones<sup>\*19</sup>.

## G. Symétries et invariances en électrostatique

### 1. Définitions

#### a. Plans de symétrie et d'antisymétrie

On s'intéresse aux symétries ou antisymétries par rapport à un plan  $\mathcal{P}$ <sup>\*20</sup>. Dans ce qui suit,  $M$  désigne un point quelconque,  $M' = \text{sym}_{\mathcal{P}} M$  son symétrique par rapport à  $\mathcal{P}$  (c.-à-d. le point tel que  $\mathcal{P}$  soit le plan médiateur du segment  $[MM']$ ),  $f$  une fonction scalaire (c.-à-d. à valeurs réelles ou complexes) de la position et  $\vec{f}$  une fonction vectorielle de la position.

#### i. Symétrie d'un vecteur

Tout vecteur  $\vec{v}$  peut s'écrire  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ , où  $\vec{v}_{\parallel}$  est la composante parallèle à  $\mathcal{P}$  et  $\vec{v}_{\perp}$  est la composante normale. Le **symétrique de  $\vec{v}$  par rapport au plan  $\mathcal{P}$** <sup>\*21</sup> est le vecteur

$$\text{sym}_{\mathcal{P}} \vec{v} := \vec{v}_{\parallel} - \vec{v}_{\perp}.$$

#### ii. Plan de symétrie

Posons  $\vec{v} = \vec{f}(M)$  et  $\vec{v}' = \vec{f}(M')$ , où  $M' = \text{sym}_{\mathcal{P}} M$ .

$\mathcal{P}$  est un plan de symétrie d'une fonction scalaire  $f$  si, pour tout  $M$ , on a  $f(M') = +f(M)$ .

$\mathcal{P}$  est un plan de symétrie d'une fonction vectorielle  $\vec{f}$  si, pour tout  $M$ , on a

$$\vec{v}' = +\text{sym}_{\mathcal{P}} \vec{v}, \quad \text{c.-à-d.} \quad \vec{v}'_{\parallel} = +\vec{v}_{\parallel} \quad \text{et} \quad \vec{v}'_{\perp} = -\vec{v}_{\perp}.\quad (\text{I.57})$$

#### iii. Plan d'antisymétrie

$\mathcal{P}$  est un plan d'antisymétrie de  $f$  si, pour tout  $M$ , on a  $f(M') = -f(M)$ .

$\mathcal{P}$  est un plan d'antisymétrie de  $\vec{f}$  si, pour tout  $M$ , on a

$$\vec{v}' = -\text{sym}_{\mathcal{P}} \vec{v}, \quad \text{c.-à-d.} \quad \vec{v}'_{\parallel} = -\vec{v}_{\parallel} \quad \text{et} \quad \vec{v}'_{\perp} = +\vec{v}_{\perp}.\quad (\text{I.58})$$

19. Ici, la continuité est automatique car  $V$  est calculé directement à partir des sources. Quand  $V$  est calculé à partir de  $\vec{E}$  dans plusieurs zones emboîtées, le potentiel n'est connu qu'à une constante près propre à chaque zone. Si l'on veut que la convention usuelle à l'infini soit respectée, il faut alors d'abord fixer la valeur de la constante dans l'expression de  $V$  dans la zone la plus externe avec cette convention, puis procéder de l'extérieur vers l'intérieur en imposant au potentiel d'être continu à chaque interface entre zones.

20. Une symétrie par rapport à un plan est aussi appelée une **réflexion**.

21. Cette définition de l'image par une réflexion, de même que celles utilisées ci-après pour une translation ou une rotation, généralise, pour un vecteur quelconque, la définition naturelle pour un vecteur de l'espace : pour toute transformation de l'espace  $\Theta$ , quels que soient les points  $A$  et  $B$ ,  $\Theta(\vec{AB}) := \overrightarrow{\Theta(A)\Theta(B)}$ .

## b. Invariances

### i. Invariance par translation

Soit  $\mathcal{D}$  une droite.

Une fonction *scalaire ou vectorielle*  $\overset{(\curvearrowright)}{f}$  est invariante par translation d'axe  $\mathcal{D}$  si, pour tout point  $M$  et toute translation  $\mathcal{T}$  parallèle à  $\mathcal{D}$  (quel que soit le déplacement), on a  $\overset{(\curvearrowright)}{f}(M') = \overset{(\curvearrowright)}{f}(M)$ , où  $M' := \mathcal{T}(M)$ .

### ii. Invariance par rotation

#### $\alpha$ . Rotation autour d'un axe

Une fonction *scalaire*  $f$  est invariante par rotation d'axe  $\mathcal{D}$  si, pour tout point  $M$  et toute rotation  $\mathcal{R}$  autour de  $\mathcal{D}$  (quel que soit l'angle), on a  $f(M') = f(M)$ , où  $M' := \mathcal{R}(M)$ .

Une fonction *vectorielle*  $\overset{(\curvearrowright)}{f}$  est invariante par rotation d'axe  $\mathcal{D}$  si, pour tout point  $M$  et toute rotation  $\mathcal{R}$  autour de  $\mathcal{D}$ , on a  $\overset{(\curvearrowright)}{f}(M') = \mathcal{R}(\overset{(\curvearrowright)}{f}(M))$ , où  $M' := \mathcal{R}(M)$ .

On dit d'une telle fonction qu'elle admet une *symétrie cylindrique* <sup>※22</sup> d'axe  $\mathcal{D}$ ; il est alors généralement judicieux d'utiliser les coordonnées cylindriques (ou sphériques) avec  $O$  sur  $\mathcal{D}$  et  $(Oz) := \mathcal{D}$  pour étudier les propriétés des quantités reliées à cette fonction. La symétrie cylindrique d'axe  $\mathcal{D}$  équivaut à la symétrie par rapport à tout plan contenant  $\mathcal{D}$ . Un objet possédant une propriété à symétrie cylindrique est dit *axisymétrique* (autour de  $\mathcal{D}$ ) pour cette propriété.

#### $\beta$ . Rotation autour d'un point

Une fonction est dite invariante par rotation de centre  $O$  si, pour toute droite  $\mathcal{D}$  passant par le point  $O$ , la fonction est invariante par rotation d'axe  $\mathcal{D}$ .

On dit d'une telle fonction qu'elle admet une *symétrie sphérique* <sup>※23</sup> de centre  $O$ ; les coordonnées sphériques d'origine  $O$  sont alors souvent préférables. La symétrie sphérique équivaut à la symétrie par rapport à tout plan contenant  $O$ . Un objet possédant une propriété à symétrie sphérique est dit *isotrope* (autour de  $O$ ) pour cette propriété.

## c. Définitions communes (hors programme)

On a distingué ci-dessus les définitions des transformations spatiales des fonctions à valeurs scalaires de celles des fonctions à valeurs vectorielles. Pour les unifier, convenons que, pour tout scalaire  $\lambda$  et pour toute réflexion, translation ou rotation  $\Theta$ , on a  $\Theta(\lambda) := \lambda$ .

Comme, par ailleurs, pour toute translation  $\mathcal{T}$  et tout vecteur  $\vec{v}$ , on a  $\mathcal{T}(\vec{v}) = \vec{v}$ , on peut adopter les définitions suivantes communes aux fonctions scalaires et vectorielles de la position :

- $\mathcal{P}$  est un plan de symétrie de  $\overset{(\curvearrowright)}{f}$  si

$$\overset{(\curvearrowright)}{f} \circ \text{sym}_{\mathcal{P}} = +\text{sym}_{\mathcal{P}} \circ \overset{(\curvearrowright)}{f}; \quad (\text{I.59})$$

- $\mathcal{P}$  est un plan d'antisymétrie de  $\overset{(\curvearrowright)}{f}$  si

$$\overset{(\curvearrowright)}{f} \circ \text{sym}_{\mathcal{P}} = -\text{sym}_{\mathcal{P}} \circ \overset{(\curvearrowright)}{f}; \quad (\text{I.60})$$

- $\overset{(\curvearrowright)}{f}$  est invariante par translation (resp. rotation) d'axe  $\mathcal{D}$  si

$$\overset{(\curvearrowright)}{f} \circ \Theta = \Theta \circ \overset{(\curvearrowright)}{f} \quad (\text{I.61})$$

pour toute translation (resp. rotation)  $\Theta$  d'axe  $\mathcal{D}$ .

## 2. Symétries et invariances de $\vec{E}$ et $V$

### a. Symétries

Considérons deux charges  $Q$  et  $Q'$  placées en des points symétriques  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à un plan  $\mathcal{P}$  et calculons le champ créé en deux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport à  $\mathcal{P}$ . On a

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( Q \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} + Q' \frac{\overrightarrow{P'M}}{P'M^3} \right) = \vec{E}_{\parallel}(M) + \vec{E}_{\perp}(M) \quad (\text{I.62})$$

22. À distinguer d'une *symétrie axiale*, qui est une invariance par rotation autour d'un axe de  $\pi$  rad seulement.

23. À distinguer d'une *symétrie centrale*, qui est une invariance par rotation autour d'un point de  $\pi$  rad seulement.

avec

$$\vec{E}_{//}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( Q \frac{\vec{PM}_{//}}{PM^3} + Q' \frac{\vec{P'M}_{//}}{P'M^3} \right) \quad \text{et} \quad \vec{E}_{\perp}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( Q \frac{\vec{PM}_{\perp}}{PM^3} + Q' \frac{\vec{P'M}_{\perp}}{P'M^3} \right). \quad (\text{I.63})$$

De même,

$$\vec{E}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( Q \frac{\vec{PM}'}{PM'^3} + Q' \frac{\vec{P'M}'}{P'M'^3} \right) = \vec{E}_{//}(M') + \vec{E}_{\perp}(M') \quad (\text{I.64})$$

avec

$$\vec{E}_{//}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( Q \frac{\vec{PM}'_{//}}{PM'^3} + Q' \frac{\vec{P'M}'_{//}}{P'M'^3} \right) \quad \text{et} \quad \vec{E}_{\perp}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( Q \frac{\vec{PM}'_{\perp}}{PM'^3} + Q' \frac{\vec{P'M}'_{\perp}}{P'M'^3} \right). \quad (\text{I.65})$$

Or,

$$PM' = P'M, \quad \vec{PM}'_{//} = +\vec{P'M}_{//}, \quad \vec{PM}'_{\perp} = -\vec{P'M}_{\perp} \quad (\text{I.66})$$

et

$$P'M' = PM, \quad \vec{P'M}'_{//} = +\vec{PM}_{//}, \quad \vec{P'M}'_{\perp} = -\vec{PM}_{\perp}, \quad (\text{I.67})$$

d'où

$$\vec{E}_{//}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( Q \frac{\vec{P'M}_{//}}{P'M^3} + Q' \frac{\vec{PM}_{//}}{PM^3} \right) \quad (\text{I.68})$$

et

$$\vec{E}_{\perp}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -Q \frac{\vec{P'M}_{\perp}}{P'M^3} - Q' \frac{\vec{PM}_{\perp}}{PM^3} \right). \quad (\text{I.69})$$

Si  $Q' = +Q$ , on a donc  $\vec{E}_{//}(M') = +\vec{E}_{//}(M)$  et  $\vec{E}_{\perp}(M') = -\vec{E}_{\perp}(M)$  : la symétrie de la distribution de charges entraîne donc celle du champ. En particulier, pour  $M$  sur le plan, on a  $M' = M$ , donc  $\vec{E}_{\perp}(M) = -\vec{E}_{\perp}(M)$ , c.-à-d.  $\vec{E}_{\perp}(M) = \vec{0}$  et  $\vec{E}(M) = \vec{E}_{//}(M)$  : pour un point du plan,  $\vec{E}$  est parallèle au plan (« dans le plan »).

Et si  $Q' = -Q$ , on a  $\vec{E}_{//}(M') = -\vec{E}_{//}(M)$  et  $\vec{E}_{\perp}(M') = +\vec{E}_{\perp}(M)$  : l'antisymétrie de la distribution de charges entraîne donc celle du champ. En particulier, pour  $M$  sur le plan, on a  $M' = M$ , donc  $\vec{E}_{//}(M) = -\vec{E}_{//}(M)$ , c.-à-d.  $\vec{E}_{//}(M) = \vec{0}$  et  $\vec{E}(M) = \vec{E}_{\perp}(M)$  : pour un point du plan,  $\vec{E}$  est perpendiculaire au plan.

Le même genre de raisonnement s'applique au potentiel. Tout ceci se généralise à un plus grand nombre de sources.

Les conséquences des symétries de la distribution de charges sur le champ électrique  $\vec{E}$  et le potentiel scalaire  $V$ <sup>\*24</sup> sont résumées dans le tableau suivant :

	Distribution de charges	
	symétrique par rapport à $\mathcal{P}$	antisymétrique
Type de symétrie de $\vec{E}$ et $V$ par rapport à $\mathcal{P}$	$\vec{E}$ et $V$ symétriques	$\vec{E}$ et $V$ antisymétriques
Pour $M \in \mathcal{P}$	$\vec{E}(M) // \mathcal{P}$	$\vec{E}(M) \perp \mathcal{P},$ $V(M) = 0$

## b. Invariances

- **Invariance par translation** : si la distribution de charges est invariante par translation d'axe  $\mathcal{D}$ , alors  $\vec{E}$  et  $V$  le sont aussi.

Si  $\mathcal{D}$  est parallèle à  $\vec{u}_z$ , par exemple, alors  $\rho$ ,  $\vec{E}$  et  $V$  peuvent dépendre des variables  $x$  et  $y$ , ou de  $\rho$  et  $\phi$ , mais pas de  $z$ . (Le vecteur  $\vec{E}$  peut en revanche avoir une composante selon le vecteur  $\vec{u}_z$ .)

- **Invariance par rotation** : si la distribution de charges est invariante par rotation d'axe  $\mathcal{D}$ , alors  $\vec{E}$  et  $V$  le sont aussi.

24. Pour le potentiel, ce qui suit ne vaut qu'avec l'expression (pour une distribution volumique)

$$V(M) = \iiint_P \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 PM} d\tau,$$

c.-à-d. avec la convention  $V(r \rightarrow \infty) = 0$ .

Si  $\mathcal{D} = (O, \vec{u}_z)$ , les composantes scalaires <sup>\*25</sup> dans les bases cylindrique et sphérique de  $\vec{E}$  (c.-à-d.  $E_\rho$ , etc., pas les composantes vectorielles  $E_\rho \vec{u}_\rho \dots$ ) peuvent dépendre des variables  $\rho$  et  $z$ , ou de  $r$  et  $\theta$ , mais pas de  $\phi$ .

Montrons par exemple l'invariance de  $\vec{E}$  par rotation autour d'un axe  $\mathcal{D}$  si  $\rho$  est invariante par rotation autour de cet axe. Soit  $\mathcal{R}$  une rotation d'axe  $\mathcal{D}$  et  $M' = \mathcal{R}(M)$  un point. On a

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_P \frac{\rho(P) \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau(P) \quad (I.70)$$

et

$$\vec{E}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P'} \frac{\rho(P') \overrightarrow{P'M'}}{P'M'^3} d\tau(P'). \quad (I.71)$$

Pour tout point  $P'$ , il existe un et un seul point  $P$  tel que  $P' = \mathcal{R}(P)$ . On a alors  $\overrightarrow{P'M'} = \mathcal{R}(\overrightarrow{PM})$ ,  $P'M' = PM$  et  $d\tau(P') = d\tau(P)$ , donc

$$\vec{E}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_P \frac{\rho(\mathcal{R}[P]) \mathcal{R}(\overrightarrow{PM})}{PM^3} d\tau(P). \quad (I.72)$$

La distribution de  $\rho$  étant invariante,  $\rho(\mathcal{R}[P]) = \rho(P)$ . Comme  $\mathcal{R}$  est en outre une application linéaire et que l'intégrale correspond à une somme, on a

$$\vec{E}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_P \frac{\rho(P) \mathcal{R}(\overrightarrow{PM})}{PM^3} d\tau(P) = \mathcal{R} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_P \frac{\rho(P) \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau(P) \right) = \mathcal{R}(\vec{E}[M]). \quad (I.73)$$

## II. Énergie potentielle électrostatique

### 1. Charges discrètes

**Remarque.** Tous les déplacements considérés ici sont quasi statiques, c.-à-d. s'effectuent à une vitesse infinitésimale. On sort sinon du cadre de l'électrostatique. ■

#### a. Énergie potentielle d'une charge dans un champ stationnaire

Considérons une charge ponctuelle  $q$  située en un point  $M$ , de vecteur position  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ , plongée dans un champ électrique  $\vec{E}(\vec{r})$  stationnaire ( $\partial\vec{E}/\partial t = \vec{0}$  sur le chemin parcouru par  $q$ ; de même,  $\partial V/\partial t = 0$ ). La force électrique sur  $q$  vaut  $\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$ . Le travail élémentaire de cette force quand  $q$  se déplace infinitésimalement de  $d\vec{r}$  vaut

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -q \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{r} = -d(qV[\vec{r}] + c^{te}), \quad (I.74)$$

où  $c^{te}$  est une constante arbitraire. Il existe donc une fonction  $\mathcal{E}_p$  telle que

$$dW = -d\mathcal{E}_p. \quad (I.75)$$

Cette fonction est appelée **énergie potentielle de la charge  $q$  dans le champ  $\vec{E}$**  ou, plus rigoureusement, **énergie potentielle d'interaction entre  $q$  et les sources de  $\vec{E}$** . Avec la convention habituelle, c.-à-d.  $V$  et  $\mathcal{E}_p$  nuls à l'infini, on a

$$\mathcal{E}_p = qV(\vec{r}). \quad (I.76)$$

La force  $\vec{F}$  est donc **conservative** et dérive de  $\mathcal{E}_p$  par l'expression <sup>\*26</sup>

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p. \quad (I.78)$$

25. Attention, le vecteur  $\vec{E}$  lui-même peut très bien avoir une composante selon  $\vec{u}_\rho$ ,  $\vec{u}_\phi$ ,  $\vec{u}_r$  ou  $\vec{u}_\theta$  et donc dépendre de  $\phi$  par ce biais. Exemple :  $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r(\theta, \phi)$  pour le champ créé par une charge ponctuelle. Pour une fonction vectorielle, l'invariance par une transformation spatiale ne signifie pas que sa valeur reste identique.

26. (Hors programme.) Selon la définition plus générale utilisée en mécanique analytique, une force  $\vec{F}$  sur un point matériel dérive d'une énergie potentielle s'il existe une fonction  $\mathcal{E}_p$  telle que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial v_x} \vec{u}_x + \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial v_y} \vec{u}_y + \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial v_z} \vec{u}_z \right), \quad (I.77)$$

où  $\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$  est la vitesse du point matériel. Cette définition permet de couvrir notamment le cas de la force magnétique (voir note 1, p. 70).

**Remarque : cas d'un champ non stationnaire (hors programme)**

Si le champ n'est pas stationnaire,  $\vec{E} \neq -\overrightarrow{\text{grad}} V$  et

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial t} dt = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{r} + \frac{\partial V}{\partial t} dt \neq \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{r}, \quad (\text{I.79})$$

donc le travail élémentaire de la force électrique n'est plus égal à  $-d(qV)$  : la quantité  $qV(\vec{r}, t)$  n'est alors pas une énergie potentielle d'interaction entre  $q$  et les sources du potentiel. Bien sûr, si  $\partial \vec{E} / \partial t \neq \vec{0}$ , c'est que les sources  $Q_1, \dots, Q_n$  du champ  $\vec{E}$  sont mobiles. Il faudrait donc aussi tenir compte du travail des forces sur ces charges pour définir l'énergie du système  $\{q\} \cup \{Q_1, \dots, Q_n\}$ . ■

Nous allons maintenant calculer l'énergie potentielle d'un système de charges ponctuelles avec lui-même, en commençant par le cas de deux charges.

**b. Énergie potentielle d'interaction entre deux charges ponctuelles**

Considérons d'abord deux charges ponctuelles  $q_i$  et  $q_j$  situées en  $M_i$  et  $M_j$ , et calculons le travail élémentaire  $dW_{\text{int}}(\{q_i, q_j\})$  des forces intérieures au système  $\{q_i, q_j\}$  quand les charges subissent des déplacements élémentaires  $d\overrightarrow{OM}_i$  et  $d\overrightarrow{OM}_j$ , où  $O$  est un point fixe. (Ces déplacements sont supposés très lents, sinon la loi de Coulomb n'est pas applicable.) Par définition,

$$dW_{\text{int}}(\{q_i, q_j\}) = \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot d\overrightarrow{OM}_j + \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot d\overrightarrow{OM}_i. \quad (\text{I.80})$$

Comme  $\vec{F}_{j \rightarrow i} = -\vec{F}_{i \rightarrow j}$  (3<sup>e</sup> loi de Newton),

$$\begin{aligned} dW_{\text{int}}(\{q_i, q_j\}) &= \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot (d\overrightarrow{OM}_j - d\overrightarrow{OM}_i) = \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot d\overrightarrow{M_i M_j} \\ &= \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_i M_j}}{(M_i M_j)^3} \cdot d\overrightarrow{M_i M_j} = \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0} \frac{M_i M_j}{(M_i M_j)^3} d(M_i M_j) \end{aligned} \quad (\text{I.81})$$

d'après le § I.D.1.a, donc

$$dW_{\text{int}}(\{q_i, q_j\}) = \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0} \frac{d(M_i M_j)}{(M_i M_j)^2} = -\frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0} d\left(\frac{1}{M_i M_j}\right) = -d(q_j V_{q_i}[M_j]). \quad (\text{I.82})$$

Pour simplifier, posons  $V_{i,j} = V_{q_i}(M_j)$ . Le travail des forces intérieures au système  $\{q_i, q_j\}$  est donc

$$dW_{\text{int}}(\{q_i, q_j\}) = -d\mathcal{E}_p(q_i \leftrightarrow q_j), \quad (\text{I.83})$$

où

$$\mathcal{E}_p(q_i \leftrightarrow q_j) = \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 M_i M_j} = q_j V_{i,j} = q_i V_{j,i} = \frac{1}{2} (q_i V_{j,i} + q_j V_{i,j}) \quad (\text{I.84})$$

est l'**énergie potentielle d'interaction entre  $q_i$  et  $q_j$** , c.-à-d. l'énergie potentielle interne du système  $\{q_i, q_j\}$ . Pour souligner ceci, nous la noterons également «  $\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\{q_i, q_j\})$  ».

Les forces sur  $q_i$  et  $q_j$  dérivent de  $\mathcal{E}_p(q_i \leftrightarrow q_j)$  :

$$\vec{F}_{i \rightarrow j} = -\overrightarrow{\text{grad}}_j \mathcal{E}_p(q_i \leftrightarrow q_j) \quad \text{et} \quad \vec{F}_{j \rightarrow i} = -\overrightarrow{\text{grad}}_i \mathcal{E}_p(q_i \leftrightarrow q_j), \quad (\text{I.85})$$

où l'entier en indice du gradient désigne la particule par rapport aux coordonnées de laquelle l'énergie potentielle est dérivée.

**c. Énergie potentielle d'interaction entre  $n$  charges ponctuelles**

Faisons maintenant le même calcul pour un système de charges  $\mathcal{S} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ . Le travail élémentaire des forces intérieures au système quand les charges se déplacent de  $d\overrightarrow{OM}_i$  est

$$dW_{\text{int}}(\mathcal{S}) = \sum_i \sum_{j \mid j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot d\overrightarrow{OM}_i = \frac{1}{2} \left( \sum_i \sum_{j \mid j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot d\overrightarrow{OM}_i + \sum_j \sum_{i \mid i \neq j} \vec{F}_{i \rightarrow j} \cdot d\overrightarrow{OM}_j \right) \quad (\text{I.86})$$

puisque la deuxième somme du dernier terme est égale à la première (les indices sont muets). Le facteur «  $1/2$  » permet de ne compter qu'une seule fois chaque paire  $\{q_i, q_j\}$  (sinon, on compte une fois le couple  $(q_i, q_j)$  et une fois le couple  $(q_j, q_i)$ ; or il s'agit de la même paire).

Comme  $\sum_i \sum_{j \mid j \neq i} = \sum_j \sum_{i \mid i \neq j}$  et que  $\vec{F}_{i \rightarrow j} = -\vec{F}_{j \rightarrow i}$ ,

$$dW_{\text{int}}(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \mid j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot d(\overrightarrow{OM}_i - \overrightarrow{OM}_j) = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \mid j \neq i} d\mathcal{E}_p(q_i \leftrightarrow q_j) = -d\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}), \quad (\text{I.87})$$

où l'énergie potentielle d'interaction entre toutes les particules du système vaut

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}) = \mathcal{E}_p(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \mid j \neq i} \mathcal{E}_p(q_i \leftrightarrow q_j) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \mid j \neq i} q_i V_{j,i} \quad (\text{I.88})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i q_i V_{\mathcal{S},i} \quad \text{avec } V_{\mathcal{S},i} = \sum_{j \mid j \neq i} V_{j,i}, \quad (\text{I.89})$$

et  $V_{\mathcal{S},i}$  est le potentiel créé en  $M_i$  par les autres charges du système  $\mathcal{S}$ .

Pour tout  $i$ ,

$$\vec{F}_{\mathcal{S} \rightarrow i} = -\overrightarrow{\text{grad}}_i \mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}). \quad (\text{I.90})$$

■

**L'énergie potentielle électrostatique interne d'un système est le travail qu'un opérateur devrait fournir, en l'absence d'autres forces que les interactions électrostatiques entre les particules du système, pour amener celles-ci de manière quasi statique depuis l'infini (c.-à-d. quand elles sont à des distances infinies les unes des autres ; état « infini » ci-dessous) jusqu'à leurs positions actuelles (état « actuel »).**

En effet,  $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{\mathcal{S} \rightarrow i} + \vec{F}_{\text{op} \rightarrow i}$ , où  $m_i$  est la masse de  $q_i$ ,  $\vec{a}_i$  son accélération,  $\vec{F}_{\mathcal{S} \rightarrow i}$  est la force exercée sur  $q_i$  par les autres charges du système et  $\vec{F}_{\text{op} \rightarrow i}$  celle appliquée par l'opérateur. Puisque le déplacement de  $q_i$  est quasi statique, c.-à-d. que  $\vec{a}_i = \vec{0}$ , on a  $\vec{F}_{\text{op} \rightarrow i} = -\vec{F}_{\mathcal{S} \rightarrow i}$ . On en déduit que  $dW_{\text{op} \rightarrow \mathcal{S}} = -dW_{\text{int}}(\mathcal{S})$ , soit

$$\begin{aligned} W_{\text{op} \rightarrow \mathcal{S}} &= \int_{\text{infini}}^{\text{actuel}} dW_{\text{op} \rightarrow \mathcal{S}} = - \int_{\text{infini}}^{\text{actuel}} dW_{\text{int}}(\mathcal{S}) \\ &= \int_{\text{infini}}^{\text{actuel}} d\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}) = (\mathcal{E}_p^{\text{int}}[\mathcal{S}])_{\text{actuel}} - (\mathcal{E}_p^{\text{int}}[\mathcal{S}])_{\text{infini}} \\ &= (\mathcal{E}_p^{\text{int}}[\mathcal{S}])_{\text{actuel}}, \end{aligned} \quad (\text{I.91})$$

puisque  $(\mathcal{E}_p^{\text{int}}[\mathcal{S}])_{\text{infini}} = 0$ .

■

L'expression (I.88) peut être réécrite

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}) = \sum_i \sum_{j \mid j < i} q_i V_{j,i}. \quad (\text{I.92})$$

La condition «  $j < i$  » dans la somme intérieure permet de ne compter qu'une seule fois chaque paire  $\{i, j\}$  et de se débarrasser du facteur  $1/2$ . L'expression (I.92) illustre le fait que  $\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S})$  correspond à l'énergie fournie au système lors du processus suivant : les particules  $q_1, \dots, q_n$  sont amenées depuis l'infini jusqu'à leur position finale l'une après l'autre ; lorsque  $q_i$  est déplacée, les particules  $q_j$  avec  $j < i$  ont déjà été fixées à leurs positions finales, donc le travail fourni à  $q_i$  est  $q_i \sum_{j \mid j < i} V_{j,i}$ .

## 2. Décomposition en sous-systèmes

Quelles que soient les interactions en jeu, on peut toujours décomposer l'énergie potentielle interne d'un système  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$  constitué de sous-systèmes  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  disjoints (c.-à-d. avec  $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' = \emptyset$  : les sous-systèmes peuvent se recouvrir spatialement, mais chaque particule du système n'appartient qu'à un seul sous-système) de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}') = \mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}) + \mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}') + \mathcal{E}_p(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}'), \quad (\text{I.93})$$

où  $\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}) = \mathcal{E}_p(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S})$ ,  $\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}') = \mathcal{E}_p(\mathcal{S}' \leftrightarrow \mathcal{S}')$  et  $\mathcal{E}_p(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}')$  est l'énergie potentielle d'interaction entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$ \*27. Pour des interactions électrostatiques,

$$\mathcal{E}_p(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}') = \sum_{q_i \in \mathcal{S}} \sum_{q'_j \in \mathcal{S}'} \mathcal{E}_p(q_i \leftrightarrow q'_j) = \sum_{q_i \in \mathcal{S}} q_i V_{\mathcal{S}',i} = \sum_{q'_j \in \mathcal{S}'} q'_j V_{\mathcal{S},j} \quad \text{si } \mathcal{S} \cap \mathcal{S}' = \emptyset. \quad (\text{I.94})$$

Si  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$  est un système isolé, en particulier si  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$  est l'Univers tout entier,  $\mathcal{E}_p(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}')$  représente l'énergie potentielle externe de  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{E}_p^{\text{ext}}(\mathcal{S})$  (de même que celle de  $\mathcal{S}'$ ).

27. Noter que  $\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}') \neq \mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}) + \mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}')$ . Dans les situations habituellement étudiées en thermodynamique classique, où  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sont des systèmes macroscopiques occupant des espaces distincts, on peut cependant souvent négliger  $\mathcal{E}_p(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}')$  devant  $\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S})$  et  $\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}')$  ; l'énergie interne est alors une quantité « extensive » :  $\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}') \approx \mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}) + \mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}')$ .

### Charges extérieures fixes les unes par rapport aux autres

Reprenons l'équation (I.93) dans le cas où les sources de  $\mathcal{S}'$  sont fixes (ou, plus généralement, à distance fixe les unes des autres). La quantité  $\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}')$  est alors une constante. L'énergie potentielle étant définie à une constante près, on peut écrire

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}') = \mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}) + \mathcal{E}_p(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}'). \quad (\text{I.95})$$

Si  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$  est en outre isolé,  $\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}')$  peut être qualifiée d'énergie potentielle totale de  $\mathcal{S}$  et

$$\mathcal{E}_p^{\text{tot}}(\mathcal{S}) = \mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}) + \mathcal{E}_p^{\text{ext}}(\mathcal{S}). \quad (\text{I.96})$$

En particulier, si  $\mathcal{S}$  ne contient qu'une seule charge  $q$  située en  $M$ ,  $\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}) = 0$  et

$$\mathcal{E}_p^{\text{tot}}(\{q\}) = q V_{\text{ext}}(M). \quad (\text{I.97})$$

On retrouve ainsi l'expression (I.76).

### 3. Cas d'une distribution continue

L'expression (I.89) se généralise au cas d'une distribution continue de charges :

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} \iiint_{P \in \mathcal{S}} \varrho_{\mathcal{S}}(P) V_{\mathcal{S}}(P) \mathring{d}\tau, \quad (\text{I.98})$$

où  $\varrho_{\mathcal{S}}(P)$  est la densité volumique de charge de  $\mathcal{S}$  au voisinage de  $P$ ,  $V_{\mathcal{S}}(P)$  est le potentiel créé en  $P$  par  $\mathcal{S}$  et  $\mathring{d}\tau$  est un volume infinitésimal autour de  $P$ . Remarquer que, dans cette expression,  $V_{\mathcal{S}}(P)$  est aussi produit par les charges situées en  $P$ , contrairement au cas d'une distribution discrète. Appliquer (I.98) au cas d'une distribution discrète ajouterait à l'expression (I.89) des termes infinis, mais constants si les particules sont inaltérables. Il existe des procédures, dites de « renormalisation », pour éliminer ces infinis, mais cela sort du cadre de ce cours.

Par ailleurs, le domaine d'intégration de  $\iiint \varrho_{\mathcal{S}} V_{\mathcal{S}} \mathring{d}\tau$  peut être étendu à l'Univers tout entier puisque  $\varrho_{\mathcal{S}} = 0$  hors de la zone où sont localisées les charges de  $\mathcal{S}$ .

De la même manière, l'énergie potentielle d'interaction entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  donnée par l'équation (I.94) devient

$$\mathcal{E}_p(\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}') = \iiint_{P \in \mathcal{S}} \varrho_{\mathcal{S}}(P) V_{\mathcal{S}'}(P) \mathring{d}\tau = \iiint_{P' \in \mathcal{S}'} \varrho_{\mathcal{S}'}(P') V_{\mathcal{S}}(P') \mathring{d}\tau' \quad \text{si } \mathcal{S} \cap \mathcal{S}' = \emptyset, \quad (\text{I.99})$$

où  $V_{\mathcal{S}'}(P)$  est le potentiel créé en  $P$  par  $\mathcal{S}'$ ,  $\varrho_{\mathcal{S}'}(P')$  est la densité volumique de charge de  $\mathcal{S}'$  au voisinage du point  $P'$  et  $\mathring{d}\tau'$  est un volume élémentaire autour de  $P'$ .

---

L'énergie interne peut toutefois ne pas être extensive en présence d'interactions à longue portée (cas des systèmes auto-gravitants, où la force est en  $1/r^2$ ) ou si la taille de l'interface entre les systèmes est comparable à la taille des systèmes (phénomènes de capillarité). Noter que, si les systèmes sont électriquement neutres, l'interaction électrostatique entre eux n'est pas à longue portée (force en  $\mathcal{O}(1/r^3)$ ; cf. chap. III).