# Contrôle continu du 5 avril 2012

## Corrigé

## Exercice 1

1. *a.* La distribution de charges est symétrique par rapport à tout plan contenant le fil ou perpendiculaire à celui-ci, donc $\vec{E}_1 = E_{1,\rho_1}(\rho_1, \phi_1, z)\, \vec{u}_{\rho_1}$.

   Elle est invariante par toute translation selon $\vec{u}_z$ et toute rotation autour de $(O, \vec{u}_z)$, donc $\vec{E}_1 = E_{1,\rho_1}(\rho_1)\, \vec{u}_{\rho_1}$.

   En appliquant le théorème de Gauss ($\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\mathrm{int}}/\epsilon_0$) à un cylindre d'axe $(O, \vec{u}_z)$, de rayon $\rho_1$ et de hauteur quelconque, on obtient que

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0\,\rho_1}\,\vec{u}_{\rho_1}.$$

   *b.* $\mathrm{d}V_1 = -\vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 = -E_{1,\rho}(\rho_1)\,\mathrm{d}\rho_1$ et $V_1(\rho_1 = a) = 0 \Longrightarrow V_1 = -\dfrac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0}\ln\dfrac{\rho_1}{a}$.

   *c.* Non, car changer de convention revient à ajouter une constante, or la constante qu'il faudrait ajouter à l'expression précédente serait infinie.

2. *a.*

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{a} - \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0}\ln\frac{\rho_1}{a} = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

   *b.* $\rho_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ et $\rho_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$, donc

$$V = \frac{\lambda}{4\,\pi\,\epsilon_0}\ln\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}.$$

   *c.* Le potentiel est nul sur le plan $x = 0$ ($\rho_1 = \rho_2$) et quand $\rho_1$ et $\rho_2$ tendent vers l'infini.

   *d.* L'équipotentielle de potentiel $V_0$ est l'ensemble des points où $V = V_0$. On a donc

$$(x+a)^2 + y^2 = ([x-a]^2 + y^2)\exp\frac{4\,\pi\,\epsilon_0\,V_0}{\lambda} = k\,([x-a]^2 + y^2).$$

   *e.* On a

$$(k-1)\,x^2 - 2\,(k+1)\,a\,x + (k-1)\,a^2 + (k-1)\,y^2 = 0,$$

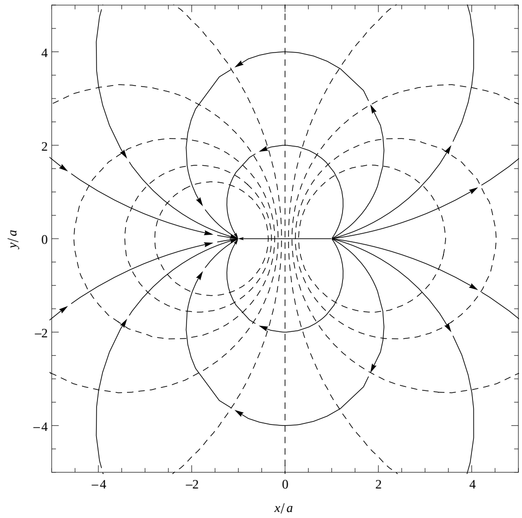
   soit

$$\left(x - \frac{k+1}{k-1}\,a\right)^2 + y^2 = \left(\left[\frac{k+1}{k-1}\right]^2 - 1\right)a^2 = \left(\frac{2\,a\sqrt{k}}{|k-1|}\right)^2.$$

   Les équipotentielles sont donc des cylindres de rayon $2\,a\sqrt{k}/|k-1|$, et d'axe dirigé selon $\vec{u}_z$ et passant par le point de coordonnées cartésiennes

$$\left(a\,\frac{k+1}{k-1}, 0, 0\right).$$

*f.*




Pointillés : équipotentielles.

Traits continus : lignes de champ.

# Exercice 2

1.
$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2)}{\partial r}E_0 = \frac{2\,E_0}{r}, \quad \text{donc} \quad \rho = \frac{2\,\epsilon_0\,E_0}{r}.$$

2.
$$Q = \int_{r=0}^{R} 4\,\pi\,r^2\,\rho(r)\,\mathrm{d}r = 4\,\pi\,\epsilon_0\,E_0\,R^2.$$

3. En appliquant le théorème de Gauss à une sphère de centre $O$ et de rayon $r > R$, on obtient que
$$\vec{E} = E_0\,\frac{R^2}{r^2}\,\vec{u}_r.$$
En intégrant $\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ de l'infini jusqu'à $r$, avec la convention $V(\infty) = 0$, on obtient que
$$V = E_0\,\frac{R^2}{r}.$$
(Mêmes résultats à l'extérieur de la sphère que pour une charge ponctuelle.)

4. $\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -E_0\,\mathrm{d}r$, donc $V = -E_0\,r + \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$. Comme $V(R^-) = V(R^+) = E_0\,R$, $\mathrm{c}^{\mathrm{te}} = 2\,E_0\,R$ et
$$V = (2\,R - r)\,E_0.$$

5. Première méthode :
$$\mathcal{E}_\mathrm{p} = \iiint_{\text{espace}} \frac{\epsilon_0\,E^2}{2}\,\mathrm{d}\tau = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\frac{\epsilon_0\,E_0^2}{2} + \int_{r=R}^{\infty} \frac{\epsilon_0\,E_0^2\,R^4}{2\,r^4}\,4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}r = \frac{8}{3}\,\pi\,R^3\,\epsilon_0\,E_0^2.$$
Deuxième méthode :
$$\mathcal{E}_\mathrm{p} = \iiint_{\text{charges}} \frac{\rho\,V}{2}\,\mathrm{d}\tau = \int_{r=0}^{R} \epsilon_0\,E_0^2\,\frac{2\,R - r}{r}\,4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}r = \frac{8}{3}\,\pi\,R^3\,\epsilon_0\,E_0^2.$$

# Exercice 3

1.
$$V = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,a}.$$

2.
$$\mathcal{E}_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\,V_i,$$
où $V_i$ est le potentiel au point occupé par la charge $q_i$ créé par les autres charges. Ici,
$$\mathcal{E}_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\times 4\,Q\,V = (4 + \sqrt{2})\,\frac{Q^2}{4\,\pi\,\epsilon_0\,a}.$$