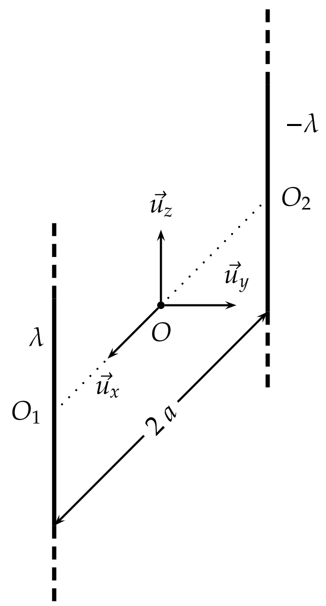
Contrôle continu du 5 avril 2012

Durée : 1 h 30

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Tout résultat doit être justifié.

Exercice 1

1. On considère un fil infini de section négligeable portant une densité linéïque de charges λ uniforme. On note O_1 un point du fil et $\vec{u}_z$ un vecteur unitaire colinéaire au fil.
   a. Calculer le champ électrique $\vec{E}_1$ créé par le fil en un point M quelconque. On l'exprimera dans le repère cylindrique $(O_1, \vec{u}_{\rho_1}, \vec{u}_{\phi_1}, \vec{u}_z)$ associé à M en fonction des coordonnées cylindriques ρ_1 (distance entre le fil et M), ϕ_1 et z.
   b. En déduire le potentiel électrique V_1 dû à ce fil en M (on adoptera la convention que le potentiel est nul à une distance a du fil).
   c. Aurait-on pu adopter la convention que le potentiel est nul à l'infini ?
2. On considère désormais un système constitué de deux fils infinis parallèles, de section négligeable et distants de $2\,a$. Le premier fil porte une densité de charges linéïque uniforme λ ; le deuxième porte une densité de charge linéïque opposée.
   a. On note ρ_2 la distance de M au deuxième fil. Déterminer le potentiel électrique global V en fonction de ρ_1 et ρ_2.
   b. Soient O un point à mi-distance des deux fils et $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ une base orthonormée directe telle que $\vec{u}_z$ soit colinéaire aux fils et que $\vec{u}_x$ soit dirigé du deuxième fil vers le premier. Exprimer V en fonction des coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
   c. Où le potentiel est-il nul ?
   d. Donner l'équation cartésienne d'une équipotentielle de potentiel V_0 quelconque en fonction de $k := \exp(4\,\pi\,\epsilon_0\,V_0/\lambda)$ et de a seulement.
   e. Montrer que les équipotentielles sont des cylindres dont on précisera le rayon et l'axe en fonction de k et a.
   f. Représenter schématiquement le système et tracer les équipotentielles et les lignes de champ dans un plan de cote z constante.



(Suite au verso.)

Exercice 2

On considère une distribution volumique de charges électriques $\rho(r)$ à symétrie sphérique et contenue à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon R.

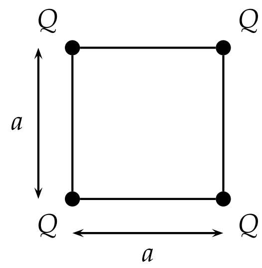
1. Déterminer, à l'aide de la loi de Gauss locale ($\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\epsilon_0$), la densité volumique de charge $\rho(r)$ pour que le champ à l'intérieur de la sphère soit de la forme $\vec{E} = E_0\,\vec{u}_r$, où E_0 est une constante.

   Rappel. La divergence en coordonnées sphériques d'un vecteur $\vec{A} = A_r\,\vec{u}_r + A_\theta\,\vec{u}_\theta + A_\phi\,\vec{u}_\phi$ est donnée par
   $$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}.$$

2. Calculer la charge totale Q de la sphère.
3. Exprimer le champ et le potentiel à l'extérieur de la sphère en fonction de E_0, R et r.
4. Calculer le potentiel à l'intérieur de la sphère en fonction de E_0, R et r.
5. Déterminer de deux manières l'énergie potentielle électrostatique $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ en fonction des données du problème.

Exercice 3

Quatre charges ponctuelles Q identiques sont disposées aux sommets d'un carré de côté a.



1. Calculer le potentiel V créé en un sommet du carré par les trois autres charges. On prendra comme convention que le potentiel est nul à l'infini.
2. Déduire de la question précédente l'énergie potentielle électrostatique $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ de la distribution de charges.