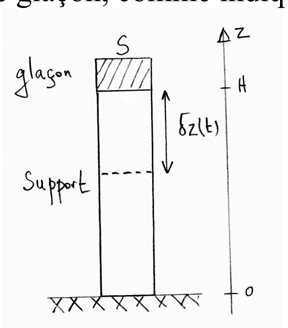
Licence 3ème année - parcours PSVP
UE LP1347 - Phénomènes de transport
Contrôle continu du 17 mai 2010

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé. Une rédaction concise mais claire et précise est demandée.
Certaines questions sont indépendantes ; si on ne peut établir un résultat, on peut l'admettre afin de traiter les questions suivantes.
Durée recommandée pour ce sujet: 1 heure

Fonte d'un glaçon posé sur un support.

Lors d'une expérience de cours, on a constaté qu'un glaçon posé sur une plaque de métal fond beaucoup plus rapidement qu'un glaçon identique posé sur une plaque de bois. Le but de cet exercice est de faire une analyse simplifiée du phénomène pour déterminer quelles caractériques du matériau contrôlent la vitesse à laquelle un morceau de glace placé dans ces conditions se transforme en liquide.

1 Glaçon posé sur un socle allongé.
On suppose dans un premier temps que le support sur lequel est posé le glaçon est une colonne étroite de hauteur H et de même section S que le glaçon, comme indiqué sur la figure ci-dessous .



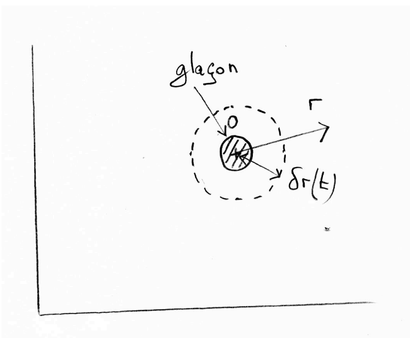
Ainsi, on peut admettre que le problème est 1D et que la température T au sein du support dépend seulement de l'altitude z et du temps t. La température initiale du glaçon est T_0 = 0 °C et celle du support vaut T_i (T_i > 0°C). On admettra a) que l'eau formée suite à la fonte de la glace est évacuée et ne participe pas aux échanges thermiques avec le support et b) que les échanges thermiques avec l'air ambiant sont négligeables.
On désigne par ρ la masse volumique du matériau, c sa capacité thermique massique, K sa conductivité thermique et α sa diffusivité thermique. Enfin, soit L_f la chaleur latente de fusion de la glace, c'est à dire l'énergie qu'il faut apporter à une unité de masse de glace initialement à 0°C pour la transformer en eau liquide à 0°C.
1.1 Préciser quelles sont les conditions aux limites dans le support au niveau du contact avec la glace ($z = H; z = 0$ correspond à la base du support) tant que le glaçon n'est pas complètement fondu.
1.2 Donner sans l'établir l'équation à laquelle obéit $T(z,t)$ dans le support et rappeler l'expression de α en fonction de ρ, c et K.
1.3 Représenter l'allure de $T(z, t_1)$ et $T(z, t_2)$ à deux instants successifs (t_1 et t_2 avec $0 < t_1 < t_2$; $t = 0$ correspond à l'instant où on pose le glaçon sur le support). On fera figurer sur les axes les valeurs $z = 0$, $z = H$, $T = T_0$, $T = T_i$.
1.4 On ne va pas chercher à résoudre l'équation du I.1.2 mais faire un calcul approché en considérant qu'à l'instant t, la température T_0 imposée par le glaçon en $z = H$ s'est "propagée" vers le bas jusqu'à

une distance $\delta z(t)$ et que, sur cet intervalle ($H - \delta z(t) < z < H$), on a $T(z,t) = T_0$ tandis qu'au delà ($z < H - \delta z(t)$) on a $T(z,t) = T_i$. Cela revient à approcher $T(z,t)$ par une fonction de Heaviside (ou encore fonction "marche"). On se place à des temps assez petits pour que $\delta z(t) < H$.
Représenter sur le diagramme du I.1.3 la fonction approchée correspondante pour $T(z, t_1)$.
1.5 Une fonction $T(z,t)$ de ce type pourrait elle être solution de l'équation du I.1.2 (justifier; on ne demande pas de calcul).
1.6 Rappeler sans l'établir l'expression du temps caractéristique de propagation de la chaleur (ou du froid ...) sur une distance d.
1.7 En déduire l'expression de $\delta z(t)$ en fonction de α et t.
1.8 Montrer que, dans le cadre de l'approximation du I.1.4, le bilan d'énergie pour la masse $\Delta m(t)$ de glace qui a fondu entre les instants $t = 0$ et t se traduit simplement par la relation

$$\rho\, c\, S\, \delta z(t)\, (T_i - T_0) = \Delta m(t)\; L_f\,.$$

1.9 En déduire de quelle manière $\Delta m(t)$ varie avec le temps t et quel paramètre caractéristique du matériau détermine la vitesse à laquelle le glaçon fond.
1.10 Application numérique. On donne, dans les unités du S.I.
- pour le fer : $\rho \approx 8000,\ c \approx 400$ et $K \approx 100$
- pour du bois : $\rho \approx 500,\ c \approx 800$ et $K \approx 0{,}2$
Soient $\Delta m_{fer}(t)$ et $\Delta m_{bois}(t)$ les masses de glace fondues respectivement sur un support en fer et en bois. Estimer le rapport la valeur du rapport $\Delta m_{fer}(t)/\Delta m_{bois}(t)$ de ces deux masses.
1.11 A votre avis, ce modèle est-il valable pour des temps longs (justifier).

2 Glaçon posé sur une plaque mince
On considère la même expérience mais le support est maintenant une mince plaque d'épaisseur e et de grande surface (supposée infinie); elle se trouve initialement à la température T_i. Pour simplifier, on considèrera que le glaçon, placé à l'origine O du repère (figure ci-dessous) à l'instant $t = 0$, a une taille négligeable par rapport à celle de la plaque. De plus, e est suffisamment petit pour que la température ne dépende pas de la profondeur dans la plaque. Dans ces conditions, on admet que la température en un point donné ne dépend que de la distance r à O et du temps t (soit $T(r,t)$).



2.1 Comme au I.1, on suppose que $T(r,t)$ peut être approché par une fonction "marche" , c'est à dire que $T(r,t) = T_0$ pour $r < \delta r(t)$ et que $T(r,t) = T_i$ pour $r > \delta r(t)$ (cf figure).
Exprimer $\delta r(t)$ et en s'inspirant du raisonnement effectué au I.1.8, écrire le bilan thermique pour une masse de glace fondue $\Delta m(t)$, dans les conditions de cette expérience.
2.2 Comment varie maintenant $\Delta m(t)$ avec t et quel paramètre controle la vitesse à laquelle la glace fond ?
2.3 Application numérique. On donne $L_f \approx 300\ 10^3$ unité S.I., $T_i = 20°C$, $e = 1$ cm. Estimer le temps Δt nécessaire pour faire fondre une masse $\Delta m = 50$ g de glace sur une plaque de fer d'épaisseur $e = 1$ cm. Commenter le résultat obtenu.