Licence 3ème année - parcours PSVP
UE LP1347 - Phénomènes de transport
Contrôle continu du 6 avril 2010

Aucun document, calculatrice ou téléphone portable n'est autorisé. Une rédaction concise mais claire et précise est demandée.

De nombreuses questions sont indépendantes ; si on ne peut établir un résultat, on peut l'admettre afin de traiter les questions suivantes. Vérifier que toutes les expressions obtenues sont homogènes.

Durée conseillée pour ce sujet : 1h

Conduction dans un système 1D et homéothermie.

Considérons une barre de longueur L faite d'un matériau de conductivité thermique K, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c. Cette barre est le siège de phénomènes qui libèrent une puissance (apparaissant sous la forme de chaleur) par unité de volume, σ (on supposera que σ est constant et uniforme).
On définit un axe Ox le long de cette barre (placée entre $x = 0$ et $x = L$); la section de la barre (s) est assez petite (devant L^2) pour que l'on puisse considérer que la température en tout point, T, ne dépend que de x et éventuellement du temps, soit $T(x,t)$.

1 Loi de Fourier
Soit $\vec{j}$ le vecteur densité de flux de chaleur et j_x sa composante selon Ox. Rappeler la définition de j_x, préciser sa dimension et donner loi de Fourier reliant j_x au gradient de température dans la barre.
2 Equation de conservation
Etablir l'équation dite « de conservation » l'équation reliant j_x, T et σ qui traduit la conservation de l'énergie.
3 Equation de la chaleur
Combiner les deux relations ci-dessus pour obtenir l'équation "de diffusion de la chaleur" à laquelle obéit $T(x, t)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{\rho c} .$$

Préciser l'expression de α en fonction des paramètres du problème et en déduire sa dimension et l'unité S.I. dans laquelle cette grandeur s'exprime.
4 Temps caractéristique de diffusion
Etablir l'expression du temps caractéristique de diffusion de la chaleur le long de la barre, τ (pour ce raisonnement, on supposera $\sigma = 0$).
5 Cas particulier $\alpha \approx 0$.
La conductivité du matériau étant très faible, on admet dans cette question que α est quasi-nul. Quelle forme prend alors l'équation de la chaleur ?
Si la barre est totalement isolée (aucun échange avec l'extérieur), comment évolue T avec t à partir d'une situation initiale où $T(x,t = 0) = T_0$ (donner l'expression de $T(x,t)$) ?

6 Barre placée entre deux thermostats à T_1 et T_2

La barre est placée à chacune de ses extrémités en contact avec un thermostat, à la température T_1 en $x = 0$ et T_2 en $x = L$; le contact thermique avec ces thermostats est assez bon pour qu'ils imposent leur température, on a donc $T(x = 0, t) = T_1$ et $T(x = L, t) = T_2$.

La production d'énergie dans la barre est supposée nulle : $\sigma = 0$ (mais $\alpha \neq 0$). On suppose $T_1 > T_2$ pour fixer les idées.

6.1 Au bout d'un temps dont on précisera l'ordre de grandeur, un régime stationnaire s'établit. Soit $T_s(x)$ la variation correspondante de T avec x. Déterminer $T_s(x)$ en fonction des paramètres du problème.

6.2 En déduire le flux de chaleur à travers la barre en $x = 0$ et en $x = L$. Commenter.

7 Système avec production interne de chaleur et dont la température de surface est imposée. Homéothermie

On a maintenant $\sigma \neq 0$ ($\sigma > 0$ puisqu'il y a production de chaleur) et $T_1 = T_2 = T_a$, donc $T(x = 0, t) = T(x = L, t) = T_a$. Cette température du « milieu ambiant » (de l'eau par exemple pour assurer un bon contact thermique) est imposée aux extrémités de la barre ; on peut imaginer que la « barre » représente une coupe longitudinale à travers un animal.

7.1 Faire un schéma du système en indiquant les conditions aux limites.

Montrer qu'une expression du type $T_s(x) = A\,x^2 + B\,x + C$ est solution pour le régime stationnaire dans ces conditions. En déduire la valeur de A.

7.2 Chercher la solution pour $T_s(x)$ satisfaisant les conditions aux limites. En déduire B et C.

7.3 Etudier les variations de $T_s(x)$ pour $0 < x < L$ et montrer que T_s est maximale en $x = L/2$. Commenter et montrer que $T_m = T_s(x = L/2)$ est donné par

$$T_m = T_a + \frac{\sigma L^2}{8\rho c \alpha} .$$

7.4 Tracer l'allure des variations de $T_s(x)$ pour 3 valeurs différentes de σ, $\sigma = 0$, $\sigma = \sigma_1$ et $\sigma = \sigma_2$ avec $0 < \sigma_1 < \sigma_2$.

7.5 On imagine que T_m représente la température « interne » d'un organisme homéotherme. Pour que le métabolisme puisse s'effectuer normalement cette température doit atteindre une certaine valeur, T_i (par exemple $T_i \approx 37$°C pour l'homme) et rester constante même si les conditions extérieures (T_a) varient (problème de la régulation thermique).

Si T_a diminue, comment doit varier σ pour maintenir $T_m = T_i$? Montrer que la relation du 7.3 est conforme à l'intuition.

7.6 Pour T_a et T_i donnés, comment varie σ avec la taille de l'animal, L dans ce modèle ? Montrer que cela est cohérent avec le fait que dans les régions très froides, on trouve essentiellement de « gros » animaux (ours polaire par exemple).

7.7 Quelles critiques peut-on faire à ce « modèle » ? comment pourrait-on l'améliorer ?