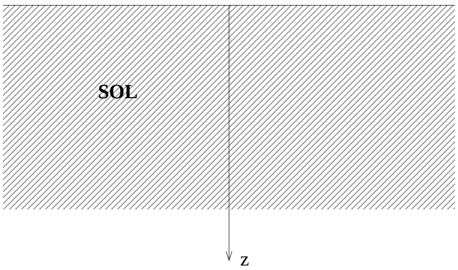
TD 4: Diffusion de la chaleur en régime périodique

Exercice 1: Propagation d'une onde thermique dans le sol



On considère un sol homogène, illimité vers le bas, dont la surface est plane et soumise à une température variant selon:

$$T(z=0,t) = T_0 + T_1 \cos \omega t.$$

La diffusivité du sol est notée D.

1. **a.** Montrer que la température ne dépend que de z et t.

b. Etablir l'équation de diffusion thermique en $T(z,t)$.

c. Donner une solution $T_0(z,t)$ satisfaisant la condition $T_0(0,t) = T_0$.

2. On cherche une solution complexe $T_1(z,t)$ satisfaisant la condition $T_1(0,t) = T_1 \exp(i\omega t)$.

a. On pose $T_1(z,t) = f(z)g(t)$. Etablir les deux équations différentielles en f et g.

b. Déterminer la solution $f(z)g(t)$.

c. Montrer que la partie réelle de $f(z)g(t)$ vérifie l'équation de diffusion et préciser sa valeur en $z = 0$. En déduire explicitement la solution cherchée $T(z,t)$.

3. **a.** Tracer $T(z,t)$ en fonction de z pour quelques valeurs de t.

b. Expliquer le phénomène qui se manifeste sous l'effet d'un refroidissement durant l'été et d'un réchauffement l'hiver, pour des cavités creusées dans le sol à certaines profondeurs.

c. On donne $D = 5 \times 10^{-7}$ m^2 s^{-1} pour le sol. Comparer les profondeurs caractéristiques pour des variations de température annuelle et journalière.

d. Pourquoi une cave (ou une grotte) conserve–t–elle une température quasiment constante tout au long de l'année?