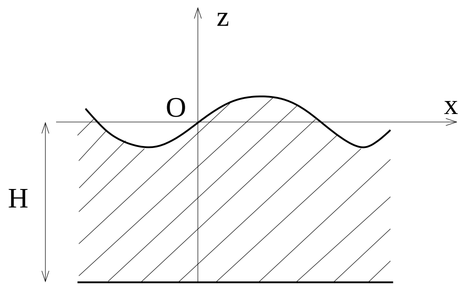
TD 5: Ondes sinusoïdales à la surface de l'eau

On considère un fluide incompressible (de l'eau) dans un bassin de profondeur H. On s'intéresse à un mouvement irrotationnel de ce fluide décrit par le potentiel des vitesses: $\phi = f(z)\cos(kx - \omega t)$ avec $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$ et $f(z)$ une fonction qu'on va préciser par la suite.



Le plan $z = 0$ correspond à la surface libre du fluide au repos; le fond du bassin est donc en $z = -H$. L'eau est assimilée à un fluide homogène de masse volumique ρ. On néglige la viscosité et, excepté dans la dernière question, la tension superficielle à l'interface entre le fluide et l'air. L'amplitude du mouvement du fluide ainsi que toutes les composantes de la vitesse sont supposées faibles.

1. A quelle situation physique correspond ce potentiel ϕ? A quelle équation aux dérivées partielles du 2nd ordre doit obéir la fonction ϕ? Préciser la forme de la fonction $f(z)$ en introduisant deux constantes d'intégration qui seront déterminées ultérieurement.

2. Monter que, dans le fluide:

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \rho g z + P + \frac{1}{2}\rho v^2 = h(t).$$

On rappelle que, dans un fluide parfait (sans viscosité), le champ de vitesse $\vec{v}$ satisfait à l'équation d'Euler:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\left(v^2\right) - \vec{v}\wedge\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}P + \vec{g}.$$

Montrer qu'on peut choisir la fonction $h(t)$ égale à une constante, cette constante étant arbitraire, indépendante du temps. Quelle est la dimension de cette constante? On admettra que pour les mouvements de faible amplitude le terme $\rho v^2/2$ est négligeable devant $P + \rho g z$.

3. Les conditions aux limites de ϕ sont imposées par le fond du bassin et par la présence de l'atmosphère à la pression P_0.

- **a.** Montrer que la condition aux limites introduite par le fond du bassin se traduit par une relation entre les constantes figurant dans l'expression de $f(z)$.
- **b.** Exprimer l'égalité de la composante verticale de la vitesse du fluide et de la vitesse de la surface au 1er ordre, c'est–à–dire pour des mouvements faibles. En dérivant la relation obtenue à la question 2, démontrer alors la condition suivante, dite *de Poisson:*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{a la surface.}$$

  En déduire la relation de dispersion liant ω^2 à g, k et H.

4.
- **a.** Donner les expressions approchées de ω^2, $v_\varphi = \omega/k$ et $v_g = d\omega/dk$ dans le cas $kH \gg 1$ (eau profonde) et dans le cas $kH \ll 1$ (eau peu profonde).
- **b.** Représenter v_φ en fonction de la longueur d'onde λ pour une profondeur H donnée. Représenter v_φ en fonction de H pour une fréquence ω donnée. Expliquer pourquoi les vagues qui arrivent sur la plage sont parallèles à la côte alors que loin dans la mer elles sont en général obliques.

5. Comment sont modifiés les résultats précédents lorsqu'on prend en compte la tension superficielle de l'interface fluide/air?