

TD 1: Cinématique des fluides – Hydrostatique

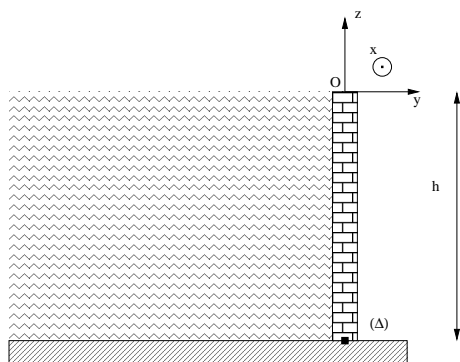
Exercice 1: Lignes de courant et trajectoires de particules fluides

On étudie l'écoulement plan stationnaire d'un fluide parfait dont le champ de vitesse locale au point M de coordonnées (x, y) est donné par :

$$v_x(x, y) = -\alpha x^2 y, \quad v_y(x, y) = \alpha x y^2.$$

1. Vérifier que cet écoulement est incompressible.
2. On recherche l'équation cartésienne et la forme des lignes de courant du fluide.
 - a. Ecrire l'équation différentielle décrivant les lignes de courant.
 - b. Montrer que l'intégration de la relation précédente conduit à l'équation d'une hyperbole $xy = \text{constante}$.
 - c. Représenter graphiquement l'allure de cet écoulement.
 - d. Etablir l'expression de la fonction de courant associée à cet écoulement. Retrouver le résultat de la question b.
3. On recherche les équations paramétriques $R_x(t)$ et $R_y(t)$ de la particule fluide P de coordonnées (x_0, y_0) à l'instant $t = 0$ et qu'on suit dans son mouvement (description lagrangienne).
 - a. Ecrire le système d'équations permettant de déterminer la trajectoire de P .
 - b. Que peut-on dire des lignes de courant et des trajectoires des particules fluides lorsque l'écoulement est stationnaire? En déduire qu'on peut utiliser le résultat écrit au 2.b pour simplifier le système précédent.
 - c. Intégrer le système pour obtenir les équations paramétriques du mouvement de P .
4. Exprimer la vitesse $\vec{V}(t)$ et l'accélération $\vec{A}(t)$ de P à partir de la description lagrangienne de la question précédente.
5. Retrouver l'accélération de la particule du fluide de l'écoulement en utilisant une description eulérienne (on se place au point d'observation M fixe).

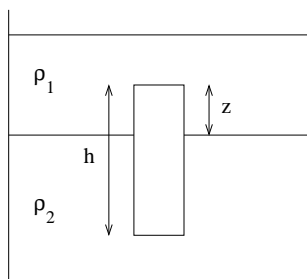
Exercice 2: Equilibre d'un barrage



Un fluide incompressible de masse volumique ρ est en équilibre dans le champ de pesanteur terrestre. Il occupe l'espace $y < 0$, $-h < z < 0$ et est retenu par un barrage situé dans le plan (Oxz) .

1. Rappeler la relation hydrostatique reliant la pression P au sein du fluide, l'accélération de la gravité g et ρ . Intégrer cette relation sachant que la pression à la surface est égale à la pression atmosphérique.
2. Exprimer la force de pression exercée sur une tranche de mur de longueur L (suivant x) et de hauteur dz . En déduire la densité surfacique de force de pression associée $f(z)$. La représenter.
3. Calculer la résultante des forces de pression s'exerçant sur le barrage.
A. N. : $h = 10$ m, le fluide étant de l'eau.

Exercice 3: Corps immergé dans deux fluides différents



Un solide assimilable à un cylindre de section S et de hauteur h , de masse volumique ρ , est immergé dans un récipient contenant deux liquides non miscibles de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 . Le récipient est supposé de grandes dimensions, de sorte que les niveaux sont indépendants de la position du cylindre. Par un guidage approprié, supposé sans frottement, le cylindre reste dans la position verticale. On repère sa position par z (voir figure).

1. Ecrire l'équation permettant de déterminer la position d'équilibre z_0 .
2. Discuter l'existence d'une position d'équilibre.
3. L'équilibre est-il stable ou instable?