

**Licence 3<sup>ème</sup> année - parcours PSVP**  
**UE LP1347 - Phénomènes de transport**  
**Examen du 29 mai 2007**  
**Durée : 1 heure 30**

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé. De nombreuses questions sont indépendantes (si on n'a pu établir un résultat qui est fourni, on peut l'admettre pour traiter les questions suivantes).

**I. Propagation de la chaleur à une dimension**

Nous allons étudier certains aspects de la propagation de la chaleur le long d'une tige infinie, confondue avec l'axe Ox. L'épaisseur de celle-ci étant faible, la température  $T(x,t)$  ne dépend que  $x$  et de  $t$ . Initialement, la température de la tige est uniforme et vaut  $T_0$ . En  $x = 0$  et à  $t = 0$ , on introduit grâce à une résistance chauffante, une quantité de chaleur  $Q$ . La durée du chauffage étant petite par rapport au temps nécessaire pour que la chaleur se propage, on la supposera nulle; par ailleurs, on suppose qu'il n'y a aucun échange de chaleur avec le milieu extérieur. La tige est faite d'un matériau dont la capacité thermique massique vaut  $c$ , la conductivité thermique  $K$  et la masse volumique  $\rho$ ; la section de la tige a pour surface  $s$ .

**I.1** Ecrire la relation phénoménologique entre la densité de flux de chaleur  $j_x$  et la dérivée spatiale de la température  $T$ ,  $\frac{\partial T}{\partial x}$ . En déduire l'expression du flux de chaleur à travers la section de la barre,  $\Phi_x$ .

**I.2** Rappeler l'équation traduisant la conservation locale de l'énergie.

**I.3** Donner une relation intégrale portant sur  $T(x,t)$  traduisant qu'à partir de  $t = 0$ , l'énergie contenue dans l'ensemble de la barre a augmenté de  $Q$ .

**I.4** Combiner les relations I.1 et I.2 pour obtenir l'équation dite "de la chaleur":

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Donner l'expression de la diffusivité thermique  $\alpha$  en fonction des paramètres définis ci-dessus et préciser la dimension de  $\alpha$  et l'unité S.I dans laquelle s'exprime cette grandeur.

**I.5** Préciser les conditions initiales et les conditions aux limites de ce problème.

**I.6** On considère, pour  $t > 0$ , la fonction  $T(x,t) = T_0 + \frac{A}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \exp(-\frac{x^2}{4\alpha t})$ .

**I.6.a** Donner la dimension de la constante  $A$  et l'unité S.I. dans laquelle elle s'exprime.

**I.6.b** Montrer que l'expression ci-dessus satisfait les conditions précisées au I.5. En utilisant la relation obtenue au I.3, exprimer la valeur de  $A$  en fonction de  $Q$  (on rappelle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \sqrt{\pi}$ ).

**I.6.c** Calculer, pour la fonction donnée ci-dessus, l'expression de  $\frac{\partial T}{\partial x}$  puis de  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ .

**I.6.d** Calculer, pour cette même fonction,  $\frac{\partial T}{\partial t}$ .

**I.6.e** En déduire que la fonction proposée est bien la solution du problème I.7 Quelle est, pour  $x$  donné quelconque, la limite de  $T(x,t)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Justifier physiquement votre résultat.

**I.7** On se place à  $x$  donné et on cherche à voir comment la température en ce point varie avec  $t$  pour  $t > 0$ . Montrer, en utilisant le résultat obtenu au I.6.d, que  $T$  atteint un maximum à un instant  $t_{\max}(x)$  dont on

précisera l'expression en fonction de  $x$  et de  $\alpha$ ; commenter la signification physique de cette expression. Est-il possible de définir une "vitesse de propagation de la chaleur" ? (justifier votre réponse).

**I.8** Montrer que la valeur de la température atteinte au maximum vaut

$$T_{\max}(x) = T_0 + \frac{A \exp(-\frac{x}{2\alpha})}{x \sqrt{2\pi}}$$

**I.9** Commenter brièvement le résultat précédent et représenter sur une même figure, l'allure de la variation de  $T$  en fonction du temps pour deux valeurs de  $x$ ,  $x = x_0$  et  $x = 2x_0$  (on fera figurer les instants  $t_{\max}(x_0)$  et  $t_{\max}(2x_0)$  et on respectera les valeurs relatives de  $T - T_0$ ).

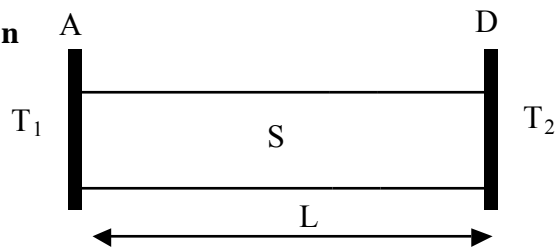
**I.10** De la même façon, représenter l'allure de la variation de  $T$  en fonction de  $x$  aux deux instants  $t_{\max}(x_0)$  et  $t_{\max}(2x_0)$  (faire figurer les valeurs  $x = x_0$  et  $x = 2x_0$  et respecter les valeurs relatives de  $T - T_0$ ).

**I.11** Si la tige était limitée (comprise entre  $x = -L$  et  $x = +L$  par exemple, sans échange de chaleur avec l'extérieur aux extrémités), en quoi le problème serait-il différent ? l'expression du I.6 serait elle encore solution de ce problème ? Préciser quelles conditions supplémentaires doit satisfaire la solution dans ce cas.

**II. Résistance thermique d'une barre présentant un défaut**

**II.1** Rappeler la définition des notions suivantes:

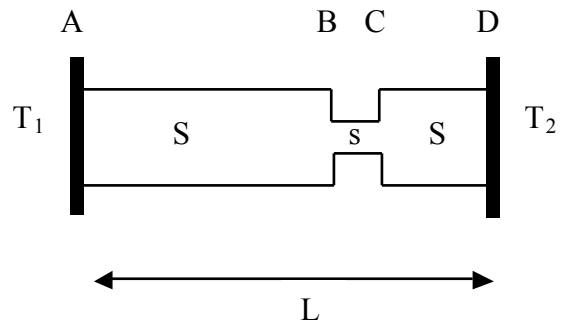
- régime permanent
- résistance thermique



On s'appuyera sur l'exemple d'une barre cylindrique AD, de longueur  $L$  et de section  $S$  constante, placée à chacune de ses extrémités en contact avec un thermostat qui impose une température constante ( $T_1$  en A et  $T_2$  en D; pour fixer les idées, on supposera  $T_1 > T_2$ ); donner l'expression de la résistance thermique  $R$  en fonction de  $L$ ,  $S$  et de la conductivité  $K$  du matériau.

**II.2** La barre présente maintenant un "défaut" (cf schéma ci-contre).

Sur la partie BC de longueur  $e$ , la section est réduite à  $s$  ( $s < S$ ), tandis que pour les deux portions restantes AB et CD, de longueurs respectives  $L_1$  et  $L_2$ , la section reste égale à  $S$ .



**II.2.a** En régime permanent, que peut-on dire des flux de chaleur  $\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C$  et  $\Phi_D$  à travers la section de la barre, au niveau de A, B, C et D (justifier) ?

**II.2.b** Que vaut le gradient de température entre A et B, entre B et C et enfin entre C et D. Représenter l'allure de la variation de la température avec la position le long de la barre entre A et D.

**II.2.c** Soient  $T_A, T_B, T_C$  et  $T_D$  les températures au niveau de A, B, C et D (avec  $T_A = T_1$  et  $T_D = T_2$  imposées par les thermostats),  $R_{AB}, R_{BC}$  et  $R_{CD}$ , les résistances des portions AB, BC et CD de la barre et  $R'$  la résistance de l'ensemble. Etablir la relation donnant  $R'$  en fonction de  $R_{AB}, R_{BC}$  et  $R_{CD}$  puis en fonction de  $L, e, S, s$  et  $K$  (vérifier que si  $e = 0$ , on retrouve bien le résultat du II.1).

**II.2.d** Exprimer l'écart relatif de température  $\beta = (T_B - T_C)/(T_1 - T_2)$  en fonction des données du problème. Montrer qu'il ne dépend finalement que des rapports  $s/S$  et  $e/L$  et est donc indépendant de la position du défaut sur la barre. Préciser la limite atteinte par  $\beta$  lorsque  $e \rightarrow 0$  puis lorsque  $s \rightarrow S$  et montrer que ces limites sont conformes aux valeurs attendues.