

Licence 3^{ème} année - parcours PSVP
UE LP1347 - Phénomènes de transport
Contrôle continu du 27 avril 2009
Durée : 2 heures

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé. Une rédaction concise mais claire et précise est demandée.

De nombreuses questions sont indépendantes ; si on ne peut établir un résultat, on peut l'admettre afin de traiter les questions suivantes. Vérifier que toutes les expressions obtenues sont homogènes.

I. Régime stationnaire dans une barre soumise à diverses conditions aux limites

Nous allons étudier le régime stationnaire qui s'établit dans une barre de longueur L constituée d'un matériau de conductivité thermique K , de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c . La section de la barre est carrée, de côté a . On définit un axe Ox le long de la barre (placée en $0 < x < L$); comme $a \ll L$, le problème est 1 D et la température en tout point, $T(x,t)$ ne dépend que de x et éventuellement du temps t .

Les conditions aux limites sont les suivantes :

- l'extrémité de gauche ($x = 0$), notée « 1 » est mise en contact à l'instant $t = 0$ avec un thermostat qui impose une température T_1 ,
- il n'y a aucune perte le long de la tige (la surface latérale est entourée d'un isolant thermique),
- à l'extrémité droite ($x = L$), notée « 2 », nous allons considérer successivement deux conditions:
 - a) contact avec un thermostat à T_2 ,
 - b) pertes par contact avec l'air ambiant.

On s'intéresse à l'influence de ces diverses conditions imposées à l'extrémité « 2 » sur le régime stationnaire qui s'établit, c'est à dire sur la fonction $T_s(x)$ où $T_s(x)$ désigne la température atteinte à la position x en régime stationnaire.

I.1 Préambule

I.1.1 Soit \vec{j} le vecteur densité de flux de chaleur et j_x sa composante selon Ox . Rappeler la loi de Fourier reliant j_x au gradient de température dans la barre.

I.1.2 En supposant qu'il n'y a aucune production ou perte d'énergie au sein du matériau, démontrer l'équation reliant j_x et T qui traduit la conservation de l'énergie.

I.1.3 Combiner les deux relations ci-dessus pour obtenir l'équation "de diffusion de la chaleur" à laquelle obéit $T(x, t)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

où α désigne la diffusivité thermique.

Préciser l'expression de α en fonction des paramètres du problème et en déduire sa dimension et l'unité S.I. dans laquelle cette grandeur s'exprime.

I.1.4 Etablir l'expression du temps caractéristique de diffusion de la chaleur le long de la barre, τ .

I.1.5 Application numérique: calculer le temps caractéristique τ pour une barre d'aluminium de longueur $L = 20$ cm. Pour ce métal : $K \approx 240 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho \approx 3000 \text{ Kg m}^{-3}$, $c \approx 1000 \text{ J Kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

I.2 Barre placée entre deux thermostats

La barre possède initialement ($t < 0$) une température uniforme, T_i . A l'instant $t = 0$, elle est mise en contact en $x = 0$ avec un thermostat à T_1 et à l'autre extrémité ($x = L$) avec un thermostat à T_2 .

I.2.1 Pour $\tau \ll t$ un régime stationnaire est atteint et $T(x, t) \approx T_s(x)$. Etablir l'expression de $T_s(x)$ en fonction de x, L, T_1 et T_2 .

I.2.2 On a $T_1 = 100 \text{ °C}$, $T_2 = 60 \text{ °C}$ et $T_i = 40 \text{ °C}$. Représenter sur le même graphique et à l'échelle, l'allure de $T(x, t)$ pour $0 < x < L$ aux instants successifs: $t = 0$, $0 < t < \tau$, $t \approx \tau$ et $\tau \ll t$ (soit 4 graphes; on demande seulement l'allure qualitative des variations, sans calcul).

I.2.3 Préciser la valeur numérique de $T_s(x = L/4)$.

I.2.4 Bilan d'énergie en régime stationnaire: exprimer le flux de chaleur Φ traversant la barre en fonction de K, L, a, T_1 et T_2 . Que vaut la puissance fournie par le thermostat "1" et la puissance reçue par le thermostat "2" ?

I.2.5 Bilan d'énergie durant le régime transitoire: montrer qu'entre l'instant initial et le moment où le régime stationnaire est établi, la barre a subi une variation d'énergie interne

$$\Delta U = \rho c a^2 \int_0^L (T_s(x') - T_i) dx' .$$

Exprimer ΔU en fonction de ρ, c, a, L, T_1, T_2 , et T_i .

En admettant qu'on ait pu déterminer la solution du problème, $T(x, t)$, exprimer le flux de chaleur $\Phi_1(t)$ fourni à la barre par le thermostat « 1 » et celui $\Phi_2(t)$ fourni par le thermostat « 2 ».

Quelle relation y a-t-il entre $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ et ΔU ?

I.3 Fuites par contact avec l'air ambiant à l'extrémité "2".

L'extrémité "2" est maintenant en contact direct avec l'air ambiant, lequel se trouve à la température T_0 (T_0 reste constant au cours du temps car l'air en contact avec l'extrémité est constamment renouvelé). En $x = L$, la barre échange alors de la chaleur avec le milieu extérieur (le reste de la tige restant quant à lui isolé) et nous admettons que la puissance perdue par l'extrémité est proportionnelle à la différence de température entre l'extrémité de la tige et l'air, soit $p = k (T(L) - T_0)$ où k est une constante positive.

On cherche à déterminer quel régime stationnaire s'établit alors.

I.3.1 Cette modification des conditions aux limites par rapport à la question I.2 change-t-elle la forme de la fonction $T_s(x)$? (justifier votre réponse). En déduire l'expression de $T_s(x)$ en fonction de x, L, T_1 et $T_s(L)$ où $T_s(L)$ est inconnue pour l'instant.

I.3.2 Etude intuitive des cas limites: qu'attend-on pour $T_s(L)$ si les pertes à l'extrémité « 2 » sont très faibles ou au contraire, très fortes ?

I.3.3 En régime stationnaire, le flux de chaleur est nécessairement uniforme le long de la barre et dans les conditions du I.3, sa valeur en $x = L$ est fixée par la valeur de p soit $p = a^2 j_x$. En utilisant la loi de Fourier, exprimer j_x en fonction de K, L, T_1 et $T_s(L)$ et en déduire la relation vérifiée par $T_s(L)$.

I.3.4 Montrer que la solution de l'équation précédente pour $T_s(L)$ s'écrit

$$T_s(L) = \frac{T_0 + \gamma T_1}{1 + \gamma}$$

où γ est un coefficient sans dimension dont on donnera l'expression en fonction de a, K, k et L .

I.3.5 Quelle est la limite atteinte par γ lorsque les pertes à l'extrémité « 2 » sont très faibles ($k \rightarrow 0$) ou au contraire très fortes ($k \rightarrow \infty$). Vérifier que ces résultats sont conformes à votre étude intuitive du I.3.2

II. Sédimentation de particules au sein d'un liquide.

Nous allons considérer l'évolution d'une distribution de « particules » (par exemple des globules rouges dans un échantillon sanguin) en suspension dans un liquide dans le champ de pesanteur (intensité : g). Le nombre de particules par unité de volume est n . On se place dans des conditions telles que n est fonction seulement de l'altitude z et du temps t . L'évolution de $n(z, t)$ est déterminée par deux phénomènes : la diffusion des particules au sein du liquide caractérisée par le coefficient de diffusion D et leur mouvement sous l'effet de la pesanteur et de la poussée d'Archimède.

II.1 Densité de courant dû à la diffusion

II.1.1 Appliquer la loi de Fick pour obtenir l'expression de $j_{z,d}$, la composante selon z du vecteur densité de courant de particules dû à la diffusion.

II.1.2 Expliquer en quelques lignes quelle est l'origine microscopique du mouvement des particules associé au phénomène de diffusion ?

II.2 Courant de gravité.

Afin de déterminer la densité de courant liée à la gravité, $j_{z,g}$, supposons que les particules sont des sphères de rayon a et de masse volumique ρ (on désigne par ρ_0 la masse volumique du liquide ; on a $\rho_0 < \rho$). Lorsque ces particules sont en mouvement à la vitesse \vec{v} au sein du fluide, elles subissent une force de résistance à l'avancement (dûe aux forces de viscosité) de la forme $\vec{F}_v = -\gamma \vec{v}$.

II.2.1 Montrer que le bilan net de la pesanteur et de la poussée d'Archimède est une force verticale dirigée vers le bas, \vec{F}_g , avec $\vec{F}_g = m_a \vec{g}$, où m_a est la masse « apparente », $m_a = \frac{4}{3} \pi a^3 (\rho - \rho_0)$.

II.2.2 Ecrire l'équation de la dynamique pour une particule en mouvement au sein du fluide ; on se limitera au cas de mouvements s'effectuant selon l'axe Oz.

II.2.3 On admettra qu'après un intervalle de temps très bref la particule acquiert une vitesse quasiment constante, \vec{v}_g . Donner l'expression de v_g en fonction de m_a , γ et g . En déduire l'expression de $j_{z,g}$.

II.2.4 Soit j_z la densité de courant totale, soit $j_z = j_{z,d} + j_{z,g}$. Rappeler l'équation reliant j_z à n qui traduit la conservation du nombre de particules et en déduire que n vérifie une l'équation

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + s g \frac{\partial n}{\partial z},$$

appelée « équation de Mason-Weaver ». Dans celle-ci, s désigne le « coefficient de sédimentation » ; donner l'expression de s et préciser pourquoi on appelle ainsi ce paramètre.

II.2.5 A l'équilibre thermodynamique (donc en régime stationnaire) à la température absolue T , $n(z)$ est donné par la distribution de Boltzmann

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{m_a g z}{kT}},$$

où n_0 est la densité de particules à $z = 0$ et k la constante de Boltzmann. Vérifier que cette expression est bien solution de l'équation de Mason-Weaver et en déduire une relation entre D , k , T et γ .

On posera $\lambda = \frac{kT}{m_a g}$; préciser la dimension et la signification physique de λ .

II.2.6 On effectue une expérience de diffusion/sédimentation dans une éprouvette verticale de hauteur L . Par un raisonnement dimensionnel, déterminer l'ordre de grandeur du rapport u entre le terme de gravité et le terme de diffusion dans l'équation de Mason-Weaver. Montrer que u s'exprime simplement en fonction de L et de λ . Discuter le résultat obtenu en précisant quelle répartition on obtiendrait à l'équilibre stationnaire selon que $u \ll 1$ ou au contraire $u \gg 1$.

II.2.7 Pour un matériau et un fluide donnés, la condition $u < 1$ ou $u > 1$ est en fait une condition sur la taille des particules. De quelle manière u dépend-il de la taille a des particules ? Montrer qu'il existe une taille « critique », a_c (dont on donnera l'expression), au delà de laquelle il y a sédimentation.

Application numérique: estimer a_c pour $\rho_0 = 1000 \text{ Kg m}^{-3}$, $\rho = 2000 \text{ Kg m}^{-3}$, $T = 300 \text{ K}$, $L = 1 \text{ m}$. On donne $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$, $k = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ S.I.}$

II.2.8 Initialement, on a réparti uniformément N_0 particules dans l'éprouvette. Préciser quelles conditions aux limites doivent être associées à l'équation de Mason-Weaver pour déterminer $n(z,t)$ à partir de cette équation.