

LP347 Propriétés dynamiques des milieux continus et phénomènes de transport

Dynamique des fluides

22 juin 2009

Les documents ne sont pas autorisés

Durée conseillée : 1h30

Propagation de la houle

L'objet de ce problème est d'étudier la propagation d'une houle, c'est à dire d'une vague dont l'amplitude a est petite devant sa longueur d'onde λ : $a \ll \lambda$.

À l'équilibre, la surface libre d'un bassin, plane et horizontale (plan $z = 0$), sépare l'atmosphère (dans la région $z > 0$) de pression uniforme p_0 , et l'eau, fluide supposé parfait, de masse volumique ρ , dans laquelle le champ de pression *hydrostatique* est noté $p_E(z)$ (dans la région $z < 0$). On note h la profondeur du bassin, et $\mathbf{g} = -g \vec{e}_z$ le champ de pesanteur.

En présence de houle, on se limitera à la description d'un écoulement *bi-dimensionnel* dans le plan xOz . Le champ de vitesse de l'eau s'écrit alors sous la forme :

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = v_x(x, z, t) \vec{e}_x + v_z(x, z, t) \vec{e}_z. \quad (1)$$

Si $p(\vec{x}, t)$ est le champ de pression dans le liquide, on notera $\pi(x, z, t)$ l'écart de pression par rapport à la valeur d'équilibre :

$$p = p_E(z) + \pi(x, z, t). \quad (2)$$

On supposera de plus que l'écoulement d'eau est incompressible, et on négligera les effets de tension superficielle à l'interface entre air et eau.

0. **Préliminaire** : Faire deux schémas illustrant les situations décrites ci-dessus à l'équilibre, puis en présence de houle. Déterminer la valeur de $p_E(z)$.

1. **Équations de conservation** :

- Par quelle équation traduit-on ici la conservation de la masse ?
- Par un argument relevant de l'analyse dimensionnelle, montrer que la condition $a \ll \lambda$ permet de négliger le terme non-linéaire de la dérivée particulaire :

$$\left\| \left(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} \right) \vec{v} \right\| \ll \left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\|. \quad (3)$$

On utilisera comme échelle caractéristique de temps la période T de l'onde.

- Par quelle équation traduit-on alors la conservation de la quantité de mouvement ?
- En déduire trois relations liant les dérivées partielles des champs v_x , v_z et π en présence de houle.

2. **Équations de propagation :** La houle étudiée, de longueur d'onde λ , se propage selon la direction Ox . On se propose donc d'étudier une solution des équations précédentes sous la forme :

$$v_x(x, z, t) = V_x(z) e^{j(kx - \omega t)}, \quad (4)$$

$$v_z(x, z, t) = V_z(z) e^{j(kx - \omega t)}, \quad (5)$$

$$\pi(x, z, t) = \Pi(z) e^{j(kx - \omega t)}, \quad (6)$$

où k et ω sont respectivement le nombre d'onde et la pulsation de la houle, et où $V_x(z)$, $V_z(z)$, et $\Pi(z)$ représentent l'amplitude des champs considérés.

- (a) Dédurre du résultat de la question 1. les trois équations différentielles couplées auxquelles obéissent les amplitudes $V_x(z)$, $V_z(z)$, et $\Pi(z)$.
- (b) En éliminant $V_x(z)$ et $V_z(z)$, montrer que l'amplitude $\Pi(z)$ obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\Pi}{dz^2} - k^2 \Pi = 0. \quad (7)$$

3. Champ de vitesse :

- (a) Quelle condition faut-il appliquer au champ de vitesse au voisinage du fond du bassin ($z = -h$) ? Montrer que cette condition devient

$$\frac{d\Pi}{dz} \Big|_{z=-h} = 0. \quad (8)$$

pour l'amplitude Π .

- (b) On note $\pi_0 = \Pi(z = 0) \in \mathbb{R}$. Déterminer les expressions des champs réels $\pi(x, z, t)$, $v_x(x, z, t)$ et $v_z(x, z, t)$.
- (c) Que deviennent ces expressions dans la limite où $h \rightarrow \infty$? On parle alors de comportement en eau profonde. Montrer que le champ de vitesse dérive d'un potentiel dont on donnera la forme explicite $\phi(x, z, t)$ dans ce cas.
- (d) Retrouver le comportement en eau profonde par intégration directe de l'équation (7). Quelle condition faut-il imposer sur $\lim_{z \rightarrow -\infty} \vec{v}$?

4. Conservation de l'énergie :

Quelle est la forme de l'équation de Bernoulli applicable à ce problème ? Quelle approximation analogue à l'équation (3) s'applique ici ? Vérifier que l'énergie est bien conservée dans le cadre de cette approximation. On se limitera au comportement en eau profonde.